Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x,y) = (x+y)\sin(x+y)$$

mit dem Entwicklungspunkt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz - \frac{z^4}{2}.$$

Lösung von Aufgabe 1

a)

		in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
f	$(x+y)\ \sin(x+y)$	0
$f_x = f_y$	$\sin(x+y) + (x+y)\ \cos(x+y)$	0
$f_{xx} = f_{xy}$ $= f_{yy}$	$2\cos(x+y) - (x+y)\ \sin(x+y)$	2

Damit erhalten wir das Taylor–Polynom

$$T_2 = x^2 + 2xy + y^2 \,.$$

Dieses Ergebnis erhält man natürlixh auch durch Einsetzen der Sinus–Reihe mit dem Argument $x+y$. Alternative Polynom-Herleitung

$$T_2 = (x+y)\big[(x+y)\big] = (x+y)^2 \quad \text{wegen} \quad \sin(x+y) = x+y+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots$$

b) Die stationären Punkte erhält man aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 2z &= 0\,, \\ 2y - 2z &= 0\,, \\ 2z - 2x - 2y - 2z^3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x = y = z$. Dies eingesetzt in die letzte Gleichung liefert

$$z + z^3 = 0 \implies z = 0.$$

Einziger stationärer Punkt ist also $P = (0,0,0)^T$.

Zur Klassifikation berechnen wir die Hesse Matrix

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2-6z^2 \end{pmatrix}.$$

Im stationären Punkt gilt

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^3 - 8\cdot(2-\lambda) = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 8)\right).$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 2+\sqrt{8}, \qquad \lambda_3 = 2-\sqrt{8}.$$

Der Punkt P ist also ein Sattelpunkt.

Aufgabe 2

Sei f das Vektorfeld $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, c_1 die Kurve mit der Parametrisierung

$$c_1(t) = (t, \sin(t)) \qquad t \in [0,\pi]$$

und c_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x,y) \,:\, x \in [0,1],\ y \in [0,2]\} \;=\; [0,1] \times [0,2]\,.$$

a) Besitzt f ein Potential?

b) Berechnen Sie für $i = 1,2$ die Kurvenintegrale

$$\int\limits_{c_i} f(x,y)\, d(x,y)\,.$$

c) Berechnen Sie den Fluß von f aus R heraus.

Lösung von Aufgabe 2

$$\text{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Mit dem Potential $\phi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ erhält man

$$\begin{aligned} \int\limits_{c_1} f\, d(x,y) &= \phi\left((c_1(\pi)\right) - \phi\left(c_1(0)\right) \\ &= \phi\begin{pmatrix}\pi \\ 0\end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} = \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

Da c_2 geschlossen ist, gilt

$$\oint\limits_{c_2} f\, d(x,y) = 0$$

Für den Fluß gilt

$$\oint\limits_{\partial k} \langle f, n\rangle\; ds \underset{\text{Green}}{=} \int\limits_K \text{div} f\, d(x,y).$$

$\text{div} f = 2x + 2y$

$$\begin{aligned} &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^2 (2x + 2y)\, dy\, dx \\ &= \int\limits_0^1 (4x + 4)\, dx \\ &= \left[2x^2 + 4x\right]_0^1 \;=\; 6 \end{aligned}$$