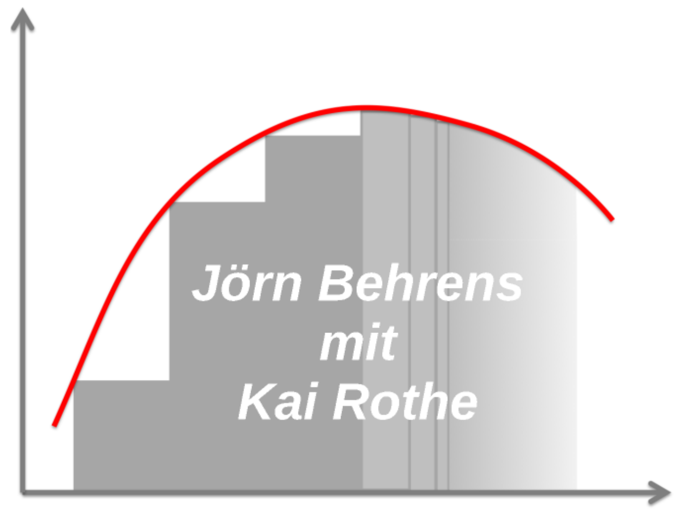
Analysis II



Resümee

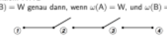
Logik+Ungleichungen

Logische Aussagen und Operationen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Negation:
$\bar{A}$ oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$
$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternative: $A \vee B$
$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.

Implikation: $A \Rightarrow B$
$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$
$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitswerttabellen: Beispiel Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \Longrightarrow B$	$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Rechenregeln für Ungleichungen

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
5. $a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Ungleichungen – Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

ume

e Induktion

$n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die

$(k+1)$ ist wahr
$n \geq n_0$ wahr.

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Fourie

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch ge

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a$$
$$= \lim_{m \to \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \right.$$

Berechnungsformel: (Fourier Ana
Unter der Voraussetzung, dass es ei
$b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig k
a_n, b_n berechnen durch die Fourier-

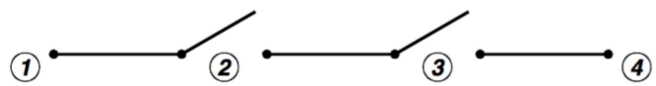
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f($$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f($$

Logische Aussagen und Operationen

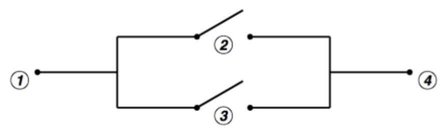
Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Negation:
$\bar{A}$ oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$
$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternative: $A \vee B$
$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$
$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$
$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Die

A
W
W
F
F

Wahrheitswerttabellen: Beispiel Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \Longrightarrow B$	$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Ungleichungen – Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt: **Axiom**

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$ **Axiom**
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$ **Axiom**
5. $a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Rechenregeln für Ungleic

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$.

1. $\forall c \in \mathbb{R}: \quad a + c > b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \cdot c > b \cdot c$
3. $\forall c \in \mathbb{R},\ c < 0: \quad a \cdot c < b \cdot c$
4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
5. $a > b \wedge c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d$
6. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b$
7. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} >$

Zahlenräume

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,

2) für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0: \quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Natürliche Zahlen
Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) 1 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
(i) $1 \in A$,
(ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Komplexe Zahlen

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition:

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1$.
a heißt *Realteil* von z: $a =: Re z$,
b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Im z$
2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gilt:
$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$
Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.
3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.
4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : Im z = 0\}$

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- "a, b teilerfremd" ⇒ Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in $\mathbb{Q}$
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $ggT(a, b) = 1$

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.
$$1,41 \ ; \quad 1,414 \ ; \quad 1,4142 \ ; \quad 1,41421 \ \dots$$
für $x = \sqrt{2}$
- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

Natürliche Zahlen
Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) 1 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,

2) für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 : \quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

=1',

ver-
enau

Ga

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +3,\ -3,\ \ldots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in $\mathbb{Z}$, falls n Teiler von m!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \text{ teilerfremd}\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in $\mathbb{Q}$ die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- "a, b teilerfremd" $\Rightarrow$ Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in $\mathbb{Q}$
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $ggT(a, b) = 1$

n $\mathbb{Q}$!

ezimalbruch}

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in $\mathbb{Q}$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

  $$1,41\ ;\quad 1,414\ ;\quad 1,4142\ ;\quad 1,41421\ \ldots$$

  für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

Bemerkungen:

- "a, b teil hervorge
- Grundla solange " vorhand

Komplexe Zahlen

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition:

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1$.
   a heißt *Realteil* von z: $a =: Rez$,
   b heißt *Imaginärteil* von z: $b =: Imz$

2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ gelte:

   $$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

   Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.

3. Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$: zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.

4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} :\ Imz = 0\}$

Funktionen

Definition
Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f.
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f.

Umkehrfunktion

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Verkettete Funktionen

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Elementare Funktionen

Elementare Funktionen:
Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen darstellen lassen, heißen *elementare Funktionen*.

Polynome (ganz rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,\ a_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$$

n heißt *Grad*, a_k, $k = 1, \dots, n$ $(k = 1 : n)$ *Koeffizienten* des Polynoms.

Supremum/Infimum

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- Sei f nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von f heißt *Supremum* von f: $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Sei f nach unten beschränkt. Die größte untere Schranke von f heißt *Infimum* von f: $\inf_{x \in D} f(x)$.

Unter den Bedingungen an f existieren $\sup f$ und $\inf f$ in $\mathbb{R}$ und sind eindeutig!

Periodische Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion. f heißt *periodisch*, falls $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$, und

$$f(x + \alpha) = f(x).$$

α heißt *Periode* von f. Die kleinste Periode von f, $\alpha_{min} = \min\{\alpha\}$ heißt *primitive Periode*.

Monotone Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt *monoton steigend* falls für $x, y \in I$ gilt:
  $$x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y).$$
- Falls sogar gilt $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$, so heißt f *streng monoton steigend*.
- Umgekehrt heißt f *monoton fallend* falls für $x, y \in I$ gilt:
  $$x < y \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y).$$
- Falls sogar gilt $x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$, so heißt f *streng monoton fallend*.

Gerade/ungerade Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

- f heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:
  $$f(x) = f(-x).$$
- f heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:
  $$f(x) = -f(-x).$$

Definition
Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f.
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f.

Umkehrfunktion

n

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

der

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Seien f
Dann ist
$f(x)$ du
Das Nac

$h = g \circ$

Verkettete Funktionen

Funktion).

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Supremum/Infimum

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion.

- Sei f nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von f heißt *Supremum* von f: $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Sei f nach unten beschränkt. Die größte untere Schranke von f heißt *Infimum* von f: $\inf_{x \in D} f(x)$.

Unter den Bedingungen an f existieren $\sup f$ und $\inf f$ in $\mathbb{R}$ und sind eindeutig!

Monotone Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt *monoton steigend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)$, so heißt f *streng monoton steigend*.
- Umgekehrt heißt f *monoton fallend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \ \Rightarrow\ f(x) \geq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$, so heißt f *streng monoton fallend*.

Gerade/ungerade Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

- f heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = f(-x).$$

- f heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = -f(-x).$$

Periodische Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion. f heißt *periodisch*, falls $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$, und

$$f(x + \alpha) = f(x).$$

α heißt *Periode* von f. Die kleinste Periode von f, $\alpha_{\min} = \min\{\alpha\}$ heißt *primitive Periode*.

Elementare Funktionen

Elementare Funktionen:
Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen darstellen lassen, heißen *elementare Funktionen*.

Polynome (ganz rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,\ a_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$$

n heißt *Grad*, a_k, $k = 1, \ldots, n$ $(k = 1 : n)$ *Koeffizienten* des Polynoms.

Grenzwerte und Stetigkeit

Umgebung/Häufungspunkt

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt δ-Umgebung von x_0.
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0) < \epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt offene Menge in $\mathbb{R}$, wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\bar{x} \in D$ und ein $\bar{x} \notin D$.
- a heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder δ-Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a$, $x \in D$, existiert.

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D. Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

Nullstellen-/Zwischenwertsatz

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$). Dann besitzt f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq \bar{y} \leq f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\bar{x}$, $a \leq \bar{x} \leq b$ mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Also, nimmt eine stetige Funktion f jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Stetigkeit

Definition:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0).$$
2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$
3. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ offene Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D stetig, wenn für alle $x_0 \in D$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Unstetigkeitsstellen

Bemerkung:

- Falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind (Sprungstelle), so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle erster Art.
- Falls mindestens einer der beiden einseitigen Limite $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ nicht existiert oder umeigentlich ist, so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art.
- Von einer oszillatorischen Unstetigkeit in $x_0 = 0$ spricht man beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Bemerkung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = g = \lim_{x \searrow x_0} f(x), \text{ aber } f(x_0) \neq g$$

so ist f in x_0 unstetig. Aber die Funktion

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \neq x_0 \\ g, \text{ falls } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig. x_0 heißt hebbare Unstetigkeitsstelle.

Umgebung/Häufungspunkt

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt δ-Umgebung von x_0.
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0) < \epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt offene Menge in $\mathbb{R}$, wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\bar{x} \in D$ und ein $\tilde{x} \notin D$.
- a heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder δ-Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a$, $x \in D$, existiert.

Definitio
Ein Wert
$\epsilon > 0$ ein

Der Grenz

Bemerku

- a m
- g m

Grenzwert

n x_0.

gefunden

In jeder

ıindestens

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D.
Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \to a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

Stetigkeit

Definition:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist linksseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist rechtsseitig stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ offene Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D stetig, wenn für alle $x_0 \in D$ gilt
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Unstetigkeitsstellen

Bemerkung:

- Falls $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind (Sprungstelle), so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle erster Art.
- Falls mindestens einer der beiden einseitigen Limite $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ nicht existiert oder umeigentlich ist, so ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art.
- Von einer oszillatorischen Unstetigkeit in $x_0 = 0$ spricht man beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Bemerkung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = g = \lim_{x\searrow x_0} f(x), \text{ aber } f(x_0) \neq g$$

so ist f in x_0 unstetig. Aber die Funktion

$$f^\star(x) := \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \neq x_0 \\ g, \text{ falls } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig. x_0 heißt hebbare Unstetigkeitsstelle.

Nullstellen-/Zwischenwertsatz

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben
$f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$).
Dann besitzt f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq \bar{y} \leq f(b)$.
Dann existiert mindestens ein $\bar{x}$, $a \leq \bar{x} \leq b$ mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Also, nimmt eine stetige Funktion f jeden Wert $\bar{y}$
zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. Für $x_0, x \in I$ ist der Differenzenquotient definiert durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
f heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Bezeichnungen: Der Grenzwert wird mit

$$f'(x_0), \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0), \text{ oder } \frac{df}{dx}|_{x=x_0}$$

bezeichnet und Ableitung oder Differentialquotient von f in x_0 genannt.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht!
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Satz von Bernoulli-L'Hospital

Satz (Bernoulli-L'Hospital)
Seien $I =]a, b[$ offenes Intervall, $x_0 \in [a, b]$ mit $U(x_0)$ Umgebung von x_0.
$f, g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen, differenzierbar für alle $x_0 \in U(x_0) \cap I$ (möglicherweise mit Ausnahme von x_0 selbst). Sei weiter

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in I} g(x) = \{0, \infty, -\infty\}.$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$.

Wenn

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gilt (d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), dann gilt auch

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x.
Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f.

Höhere Ableitungen

Bemerkung: Sei $f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

die n-te Ableitung von f.

Extrema/Null

Notw

Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. Für $x_0, x \in I$ ist der Differenzenquotient definiert durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
f heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Bezeichnungen: Der Grenzwert wird mit

$$f'(x_0), \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0), \text{ oder } \frac{df}{dx}|_{x=x_0}$$

bezeichnet und Ableitung oder Differentialquotient von f in x_0 genannt.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar.
Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht!
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x.
Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f.

Höhere Ableitungen

Bemerkung: Sei $f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

die n-te Ableitung von f.

Satz von Bernoulli-L'Hospital

Satz (Bernoulli-L'Hospital)
Seien $I =]a, b[$ offenes Intervall, $x_0 \in [a, b]$ mit $U(x_0)$ Umgebung von x_0.
$f, g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen, differenzierbar für alle $x_0 \in U(x_0) \cap I$ (möglicherweise mit Ausnahme von x_0 selbst). Sei weiter

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in I} g(x) = \{0, \infty, -\infty\}.$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$.

Wenn

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gilt (d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), dann gilt auch

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ung: Sei $f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Ableitung von f.

Extrema/Nullstellen

(Lokale) Extrema

Definition: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), falls es eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\epsilon(x_0).$$

$f(x_0)$ ist also größter (kleinster) Funktionswert in der ϵ-Umgebung.

- x_0 heißt Maximalstelle (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales Maximum (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 echte lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum).
- Statt *lokal* sagt man auch relativ.

Notwendige/hinreichende Bedingungen für Extrema

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

a) $f'(x_0) = 0$, oder

b) x_0 ist Randpunkt von I.

Satz: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.

Newton-iteration

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ $(r > 0)$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq (1-K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen $\bar{x}$, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Satz von Rolle/Mittelwertsatz

Satz (Rolle): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Falls $f(a) = f(b)$ existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Fixpunktiteration

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

Tayl

Polynomdarstellung mit einer

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0$$

$$= \sum_{k=0:n} a_k(x - x$$

Es gilt $(k = 0 : n)$:

$$a_k = \frac{p_n^{(}}{}$$

(Lokale) Extrema

Definition: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), falls es eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\epsilon(x_0).$$

$f(x_0)$ ist also größter (kleinster) Funktionswert in der ϵ-Umgebung.

- x_0 heißt Maximalstelle (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales Maximum (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 echte lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum).
- Statt *lokal* sagt man auch relativ.

Notwendige/hinreichende Bedingungen für Extrema

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

a) $f'(x_0) = 0$, oder

b) x_0 ist Randpunkt von I.

Satz: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.

Satz von Rolle/Mittelwertsatz

Satz (Rolle): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Falls $f(a) = f(b)$ existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Newton-iteration

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ $(r > 0)$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen $\bar{x}$, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Fixpunktiteration

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

on Rolle/Mittelwertsatz

$]a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

stiert mindestens ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

$\to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

stens ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Taylor-Entwicklung

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k (x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ($k = 0:n$):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Taylor-Polynom

Definition:

- Das Polynom
$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$
heißt Taylor-Polynom n-ten Grades für die Funktion f.
- x_0 heißt dann die Entwicklungsstelle.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen Schmiegeparabeln an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.
Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt Taylor-Formel mit dem Restglied $R_n(x)$ in der Schlömilch-Form.

Kurve: D

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt $(k = 0 : n)$:

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Taylor-Polynom

Definition:

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

  heißt Taylor-Polynom n-ten Grades für die Funktion f.

- x_0 heißt dann die Entwicklungsstelle.

- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen Schmiegeparabeln an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.
Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt Taylor-Formel mit dem Restglied $R_n(x)$ in der Schlömilch-Form.

ıng

-Polynom

$$_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

ı-ten Grades für die Funktion f.

ıicklungsstelle.

heißen Schmiegeparabeln an die Umgebung von $x = x_0$.

Kurven

Kurve: Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a,b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1:r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2:r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung

Definition (Mathematisch Formal):
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a,b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralr
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die F

$$F(x) = \int_a^x f(t)\; dt$$

mit $x, a \in I$ eine Stammfunktion von f.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Inte
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I$
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\; dt = F(b) - F(a) =$$

Kurve: Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \le t \le b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung

Definition (Mathematisch Formal):
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a,b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

Integrale

Unbestimmtes Integral/Stammfunktion

Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Funktion f heißt Integrand.

Integrationsregeln

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

Satz (Substitutionsregel):
Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\, dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

Bemerkung (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, dx, \text{ bzw.}$$
$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

Uneigentliches Integral

Definition: (Uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

a) $$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\, dx$$
b) $$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,
b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Riemann-Integral

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \overline{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Hauptsätze

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

mit $x, a \in I$ eine Stammfunktion von f.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

ırven

Unbestimmtes Integral/Stammfunktion

Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\; dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Funktion f heißt Integrand.

Integrationsregeln

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\ dx = c_1 \int f(x)\ dx + c_2 \int g(x)\ dx.$$

Satz (Substitutionsregel):
Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

Bemerkung (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\ dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$$

Riemann-Integral

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Hauptsätze

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

mit $x, a \in I$ eine Stammfunktion von f.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Uneigentliches Integral

Definition: (Uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\, dx$$

$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,

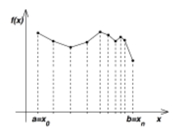
b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Numerische Integration

Trapezregel

Trapezregel:
Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und seien $y_i = f(x_i)$, dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}(x_i - x_{i-1})$$



Berechnungsidee:
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe × Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

Simpsonregel

Idee:
Berechne das Integral des Interpolationspolynoms!

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx.$$

Verallgemeinerung:
Sei (x_i, y_i) $(i = 0, \ldots, n)$ mit $x_i = a + ih$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ äquidistante Stützstellen, also $[x_0, x_n] = [a, b]$. $n = 2m$ sei gerade angenommen.

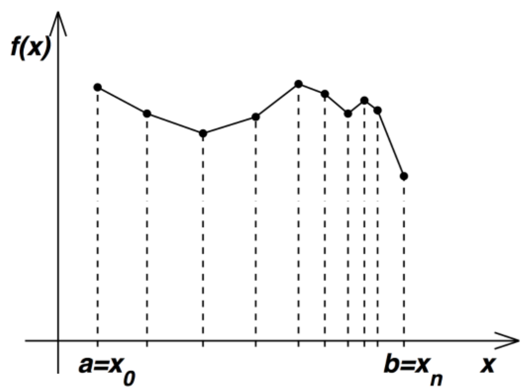
- Dann existieren Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $(k = 1, \ldots, m)$ so dass
$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^{m} [x_{2k-2}, x_{2k}].$$
- Bestimme für $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ die Wertepaare $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$, und Berechne das Polynom $p_2(x)$ mit $p_2(x_{2k-j}) = y_{2k-j}$ $(j = 0, 1, 2)$.
- Das Integral im Teilintervall $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ist dann gegeben durch die Kepplersche Fassregel:
$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$
- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der Simpson-Regel:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})\right]\end{aligned}$$

Trapezregel

Trapezregel:
Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und seien $y_i = f(x_i)$, dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}(x_i - x_{i-1})$$



Berechnungsidee:
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe × Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

Simpsonregel

n

Idee:
Berechne das Integral des Interpolationspolynoms!

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b p_n(x)\ dx.$$

Verallgemeinerung:
Sei (x_i, y_i) $(i = 0, \ldots, n)$ mit $x_i = a + ih$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ äquidistante Stützstellen, also $[x_0, x_n] = [a, b]$. $n = 2m$ sei gerade angenommen.

- Dann existieren Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $(k = 1, \ldots, m)$ so dass
$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^{m} [x_{2k-2}, x_{2k}].$$
- Bestimme für $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ die Wertepaare $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$, und Berechne das Polynom $p_2(x)$ mit $p_2(x_{2k-j}) = y_{2k-j}$ $(j = 0, 1, 2)$.
- Das Integral im Teilintervall $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ist dann gegeben durch die Kepplersche Fassregel:
$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\ dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$
- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der Simpson-Regel:
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ dx &\approx \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\ dx \\ &= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})\right] \end{aligned}$$

Interpolation

Interpolationsproblem

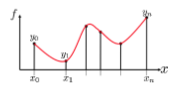
Problemstellung: (Interpolationsproblem)
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

mit Stützstellen x_k und Werten y_k gegeben ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots n.$$



Lagrange-Interpolation

Satz: (Lagrange-Polynom)
Das Polynom $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j$ mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem. $p_n(x)$ heißt Lagrange-Polynom
$L_j(x)$ sind Produkte aus n Linearfaktoren und daher Polynome n-ten Grades.

Bemerkung:
Es gibt nur ein Polynom p_n vom Grad n das die Bedingungen

$$p_n(x_i) = y_i$$

für $i = 0, \ldots, n$ erfüllt.

Newton-Interpolation

Bemerkung: (Newton-Interpolation)

- Ansatz:

  $$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

- Bestimme b_i, so dass $p_n(x_i) = y_i$, erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
y_0 &= b_0 \\
y_1 &= b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\
y_2 &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
y_n &= b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\
&\quad b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Interpolationsproblem

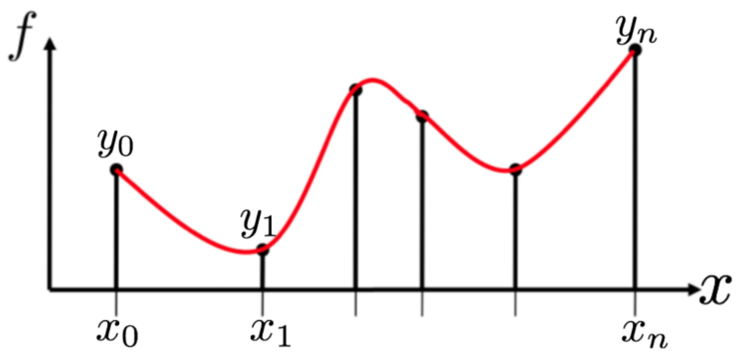
Problemstellung: (Interpolationsproblem)
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

mit Stützstellen x_k und Werten y_k gegeben ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots n.$$



Lagrange-Interpolation

Satz: (Lagrange-Polynom)
Das Polynom $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j$ mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem. $p_n(x)$ heißt Lagrange-Polynom
$L_j(x)$ sind Produkte aus n Linearfaktoren und daher Polynome n-ten Grades.

Bemerkung:
Es gibt nur ein Polynom p_n vom Grad n das die Bedingungen

$$p_n(x_i) = y_i$$

für $i = 0, \ldots, n$ erfüllt.

Newton-Interpolation

Bemerkung: (Newton-Interpolation)

- Ansatz:

  $$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

- Bestimme b_i, so dass $p_n(x_i) = y_i$, erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
y_0 &= b_0 \\
y_1 &= b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\
y_2 &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
y_n &= b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\
&\quad\; b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

er-Polynom

$= y_0$ einer 2π-periodischen
$, x_1, x_2, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$

$] + \frac{a_n^*}{2} \cos(nx)$

den gegebenen Stützstellen,

Funktionenfolgen und -reihen

Zahlenreihen

Definition: (Unendliche Reihe)
Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n):

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe (oder kurz Reihe). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Funktionenreihe

Definition: (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D. Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe oder Reihe der Funktionen (f_k).
f_k heißen Glieder der Reihe und s_n Teil- oder Partialsummen.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Sin/Cos (als Reihe)

Definition: (Sinus und Cosinus)
Auf ganz $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Die so erklärten Funktionen heißen Sinus- und Cosinus Funktion.

Cauchy-Kriterium

Satz: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit auf D beschränkten Funktionen f_k konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right\|_{\infty} < \epsilon.$$

Exponentialfunktion (als Reihe)

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Zahlenreihen

Definition: (Unendliche Reihe)
Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n):

$$s_0 = a_0,\ \ s_1 = a_0 + a_1,\ \ s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe (oder kurz Reihe). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Funktionenreihe

Definition: (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D. Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe oder Reihe der Funktionen (f_k).
f_k heißen Glieder der Reihe und s_n Teil- oder Partialsummen.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Cauchy-Kriterium

Satz: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit auf D beschränkten Funktionen f_k konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right\|_\infty < \epsilon.$$

Exponentialfunktion (als Reihe)

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Sin/Cos (als Reihe)

Definition: (Sinus und Cosinus)
Auf ganz $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots
\end{aligned}$$

Die so erklärten Funktionen heißen Sinus- und Cosinus Funktion.

gen

iome

Fourier-Reihen

Fourier-Polynom

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right]? \end{aligned}$$

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)
Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n berechnen durch die Fourier-Analyse:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad n = 0,1,2,\dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad n = 1,2,\dots. \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise

Bemerkung: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0,1,2,\dots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

Interpolierendes Fourier-Polynom

Satz: (Interpolierendes Fourier-Polynom)
Es seien $k = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) Werte $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k = y_0$ einer 2π-periodischen Funktion an den äquidistant verteilten Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$ gegeben. Das spezielle Fourier-Polynom vom Grad n

$$g_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}[a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)] + \frac{a_n^*}{2}\cos(nx)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{2}{k}(y_0 + y_1 + \cdots + y_n) \\ a_m^* &= \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k-1}(y_j \cos(m\frac{j2\pi}{k}) \\ b_m^* &= \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k-1}(y_j \sin(m\frac{j2\pi}{k}) \end{aligned}$$

ist das eindeutig bestimmte interpolierende Polynom zu den gegebenen Stützstellen, d.h. es gilt:

$$g_n^*(x_j) = y_j, \quad j = 0,\dots,k.$$

Funktio
und

Zahlenreihen

Definition: (Unendliche Reihe)
Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n):

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe (oder kurz Reihe). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Fourier-Polynom

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right] ?
\end{aligned}
$$

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)
Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n berechnen durch die Fourier-Analyse:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \quad n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}
$$

Beme

Mit de

- (
- (
- (

kann n

Komplexe Schreibweise

Bemerkung: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

ɔs$(nx)+$
fizienten

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

Interpolierendes Fourier-Polynom

Satz: (Interpolierendes Fourier-Polynom)
Es seien $k = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k = y_0$ einer 2π-periodischen Funktion an den äquidistant verteilten Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k = x_0 + 2\pi$ gegeben. Das spezielle Fourier-Polynom vom Grad n

$$g_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)] + \frac{a_n^*}{2} \cos(nx)$$

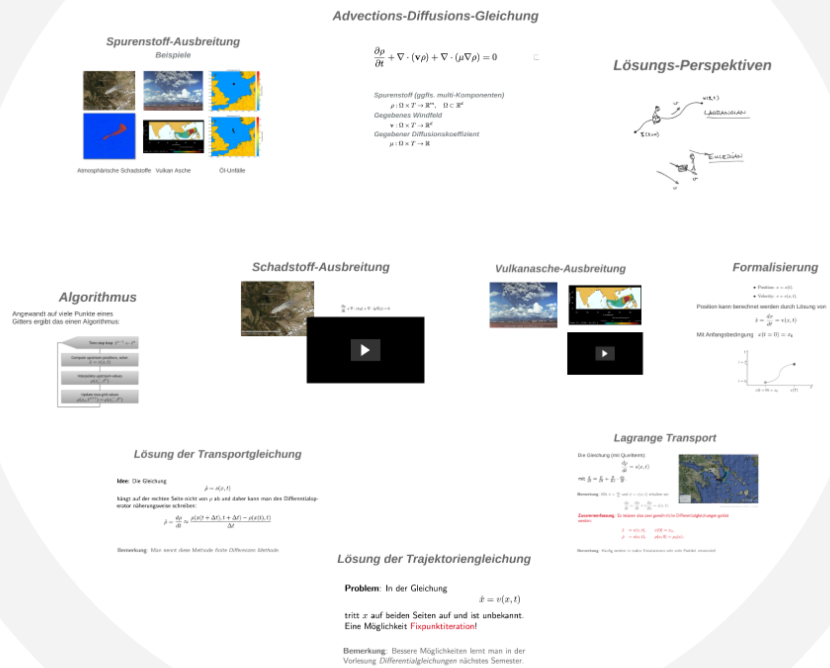
mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{2}{k}(y_0 + y_1 + \cdots + y_n) \\ a_m^* &= \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (y_j \cos(m\frac{j2\pi}{k}) \\ b_m^* &= \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (y_j \sin(m\frac{j2\pi}{k}) \end{aligned}$$

ist das eindeutig bestimmte interpolierende Polynom zu den gegebenen Stützstellen, d.h. es gilt:

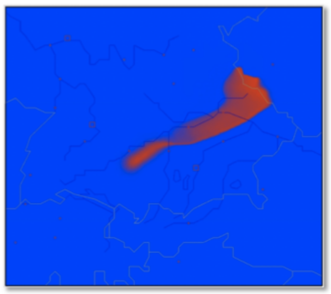
$$g_n^*(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Anwendung

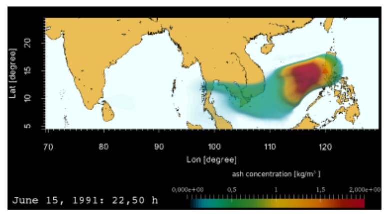

Advections-Diffusions-Gleichung
Spurenstoff-Ausbreitung
Beispiele
Atmosphärische Schadstoffe
Vulkan Asche
Öl-Unfälle
Lösungs-Perspektiven
Algorithmus
Schadstoff-Ausbreitung
Vulkanasche-Ausbreitung
Formalisierung
Lösung der Transportgleichung
Lagrange Transport
Lösung der Trajektoriengleichung
Problem: In der Gleichung
$\dot{x} = v(x,t)$
tritt x auf beiden Seiten auf und ist unbekannt.
Eine Möglichkeit Fixpunktiteration!
Bemerkung: Bessere Möglichkeiten lernt man in der Vorlesung Differentialgleichungen nächstes Semester.

Spurenstoff-Ausbreitung

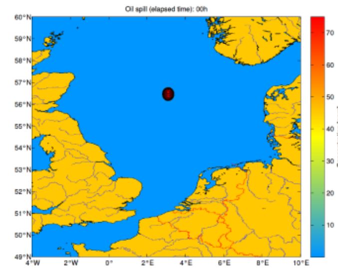
Beispiele

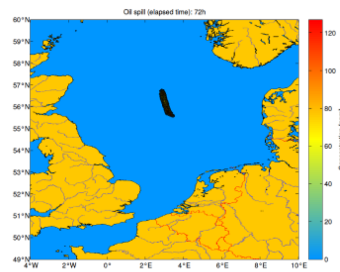


Atmosphärische Schadstoffe



Vulkan Asche

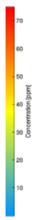


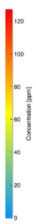


Öl-Unfälle

Advections-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + \nabla \cdot (\mu \nabla \rho) = 0$$





Spurenstoff (ggfls. multi-Komponenten)

$$\rho : \Omega \times T \to \mathbb{R}^m, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

Gegebenes Windfeld

$$\mathbf{v} : \Omega \times T \to \mathbb{R}^d$$

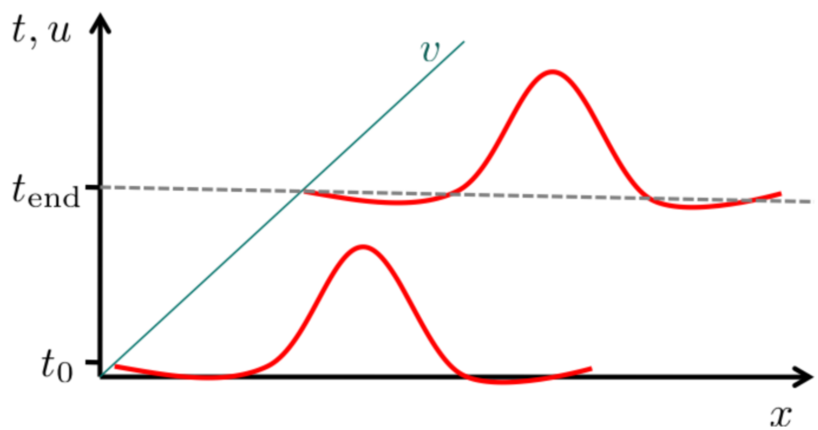
Gegebener Diffusionskoeffizient

$$\mu : \Omega \times T \to \mathbb{R}$$

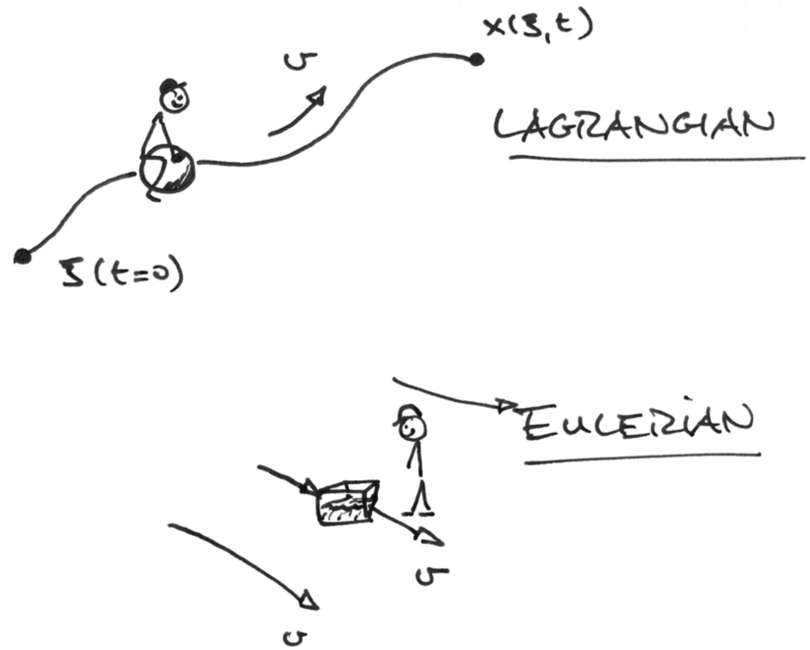
Vereinfachung: 1D Advektion

Beispiel: lineare Advektion mit konstantem Wind

$$\frac{du}{dt} + v \cdot \frac{du}{dx} = 0; \quad v \equiv 1$$



Lösungs-Perspektiven



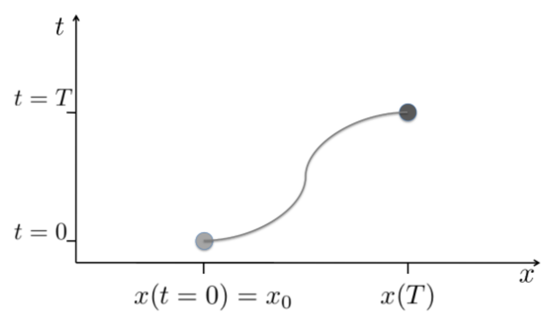
Formalisierung

- Position: $x = x(t)$.
- Velocity: $v = v(x, t)$.

Position kann berechnet werden durch Lösung von

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

Mit Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$

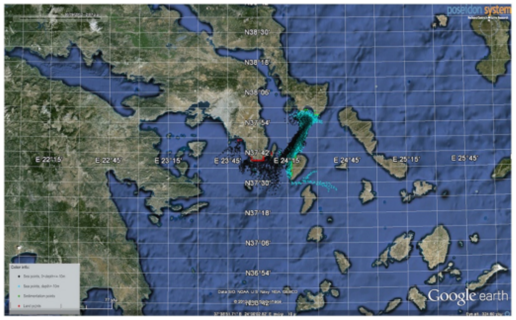


Lagrange Transport

Die Gleichung (mit Quellterm):

$$\frac{d\rho}{dt} = s(x,t)$$

mit $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$.



http://www.medess4ms.eu/oil-spill-models

Bemerkung: Mit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $\dot{x} = v(x,t)$ erhalten wir

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} = s(x,t).$$

Zusammenfassung: Es müssen also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x,t), \qquad x(0) = x_0, \\ \dot{\rho} &= s(x,t), \qquad \rho(x,0) = \rho_0(x). \end{aligned}$$

Bemerkung: Häufig werden in realen Simulationen sehr viele Partikel verwendet!

ng

Lösung der Trajektoriengleichung

Problem: In der Gleichung

$$\dot{x} = v(x, t)$$

tritt x auf beiden Seiten auf und ist unbekannt.
Eine Möglichkeit Fixpunktiteration!

Bemerkung: Bessere Möglichkeiten lernt man in der Vorlesung *Differentialgleichungen* nächstes Semester.

Lösung der Transportgleichung

Idee: Die Gleichung

$$\dot{\rho} = s(x,t)$$

hängt auf der rechten Seite nicht von ρ ab und daher kann man den Differentialoperator näherungsweise schreiben:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \approx \frac{\rho(x(t+\Delta t), t+\Delta t) - \rho(x(t), t)}{\Delta t}$$

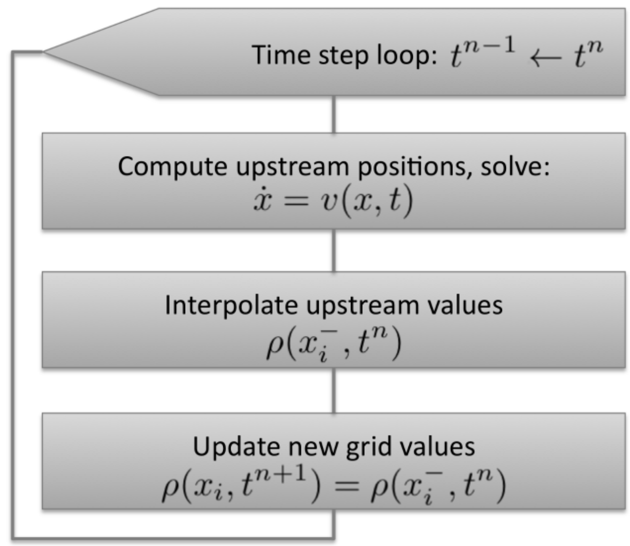
Bemerkung: Man nennt diese Methode *finite Differenzen Methode*.

Lös

Pro

Algorithmus

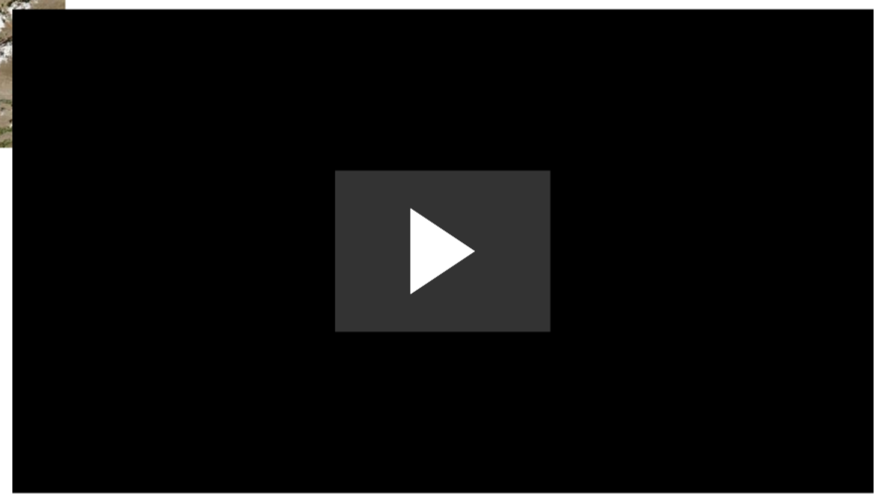
Angewandt auf viele Punkte eines Gitters ergibt das einen Algorithmus:



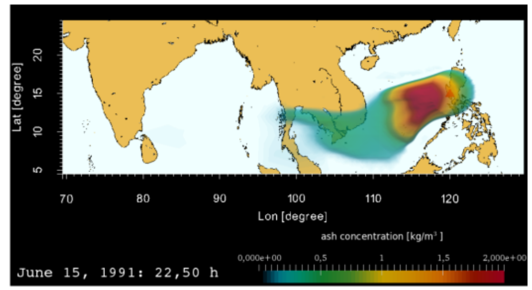
Schadstoff-Ausbreitung

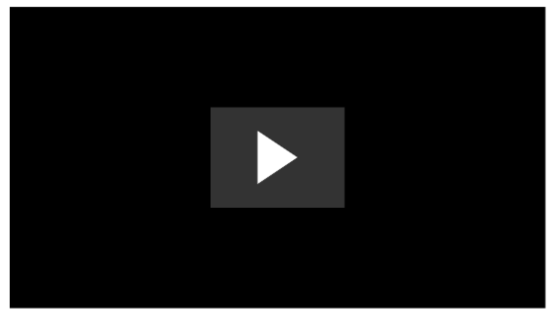
http://www.nasa.gov/mission_pages/fires/main/usa/index.html

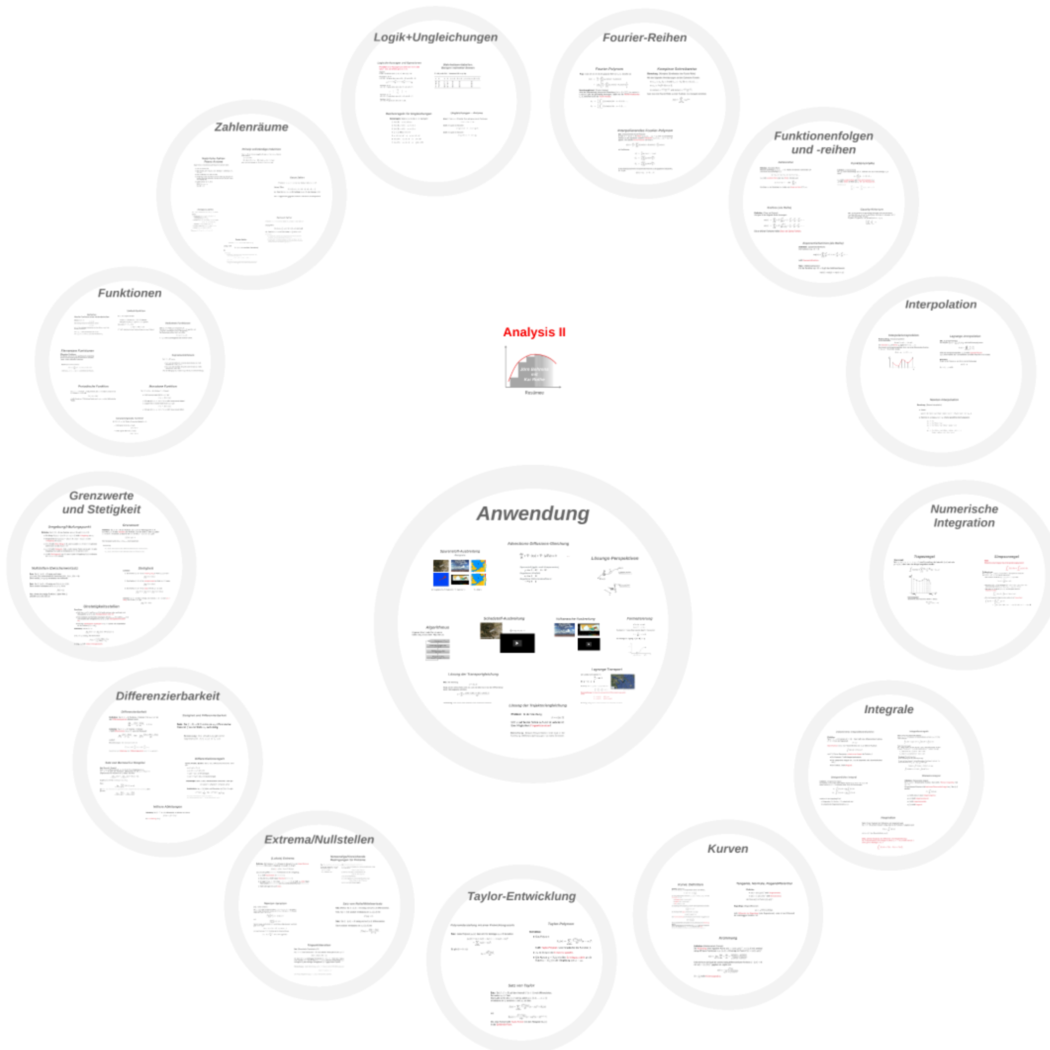
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + \nabla \cdot (\mu \nabla \rho) = 0$$



Vulkanasche-Ausbreitung






Analysis II
Logik+Ungleichungen
Fourier-Reihen
Zahlenräume
Funktionenfolgen und -reihen
Funktionen
Interpolation
Grenzwerte und Stetigkeit
Anwendung
Numerische Integration
Differenzierbarkeit
Integrale
Extrema/Nullstellen
Kurven
Taylor-Entwicklung