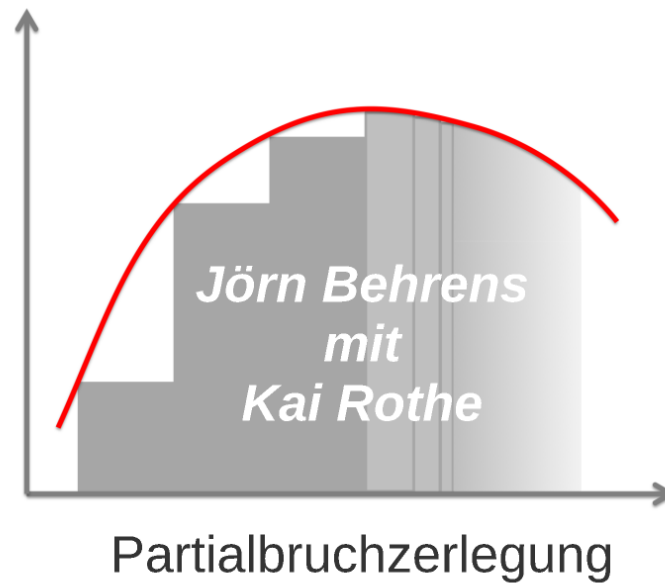


Analysis II



Buch Kapitel 2.13

Erinnerung: Integrationsregeln

Definition

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f . Ist F Stammfunktion von f , so heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):

Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx.$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Definition. \square

Bemerkung (Partielle Integration):

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Satz (Substitutionsregel):

Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt$, mit $t = \phi(x)$.
2. $\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$, mit $x = \phi(t)$.

Beweis:

Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. \square

ion der
rücke

Pol
reellen

Definition:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f . Ist F Stammfunktion von f , so heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.

Satz (Lineari
Seien $f, g : I$
stante. Dann

Beweis:
Folgt unmittel

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx.$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Definition. \square

und g ist $f \cdot g$

Satz (Substitutionsregel):

Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt$, mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$, mit $x = \phi(t)$.

Beweis:

Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. \square

Bemerkung (Partielle Integration):

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Satz (Substit

Sei f stetige
Intervall I . Es

1. $\int f(\phi(x))$
2. $\int f(x) dx$

Beweis:

Folgt aus der K

mit $F'(x) = f(x)$

Exkurs: Polynome mit reellen Koeffizienten

Satz (Nullstellenpaar):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine m -fache Nullstelle von p , d.h. $p(\alpha) = 0$. Dann ist $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ ebenfalls m -fache Nullstelle.

1

Satz (Quadratischer Faktor):

Das Produkt aus den Linearfaktoren $(x - z)$ und $(x - \bar{z})$ ist Polynom 2. Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten.

2

Satz (Polynom-Zerlegung):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$ Polynom vom Grad n . Dann lässt sich p zerlegen in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten:

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^r (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s n_j = n$.

3

Exkurs: Polynome mit reellen Koeffizienten

Ziel: Polynome lassen sich leicht integrieren!

Satz (Nullstellenpaar):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ und
sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine m -fache Nullstelle von p , d.h. $p(\alpha) = 0$.
Dann ist $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ ebenfalls m -fache Nullstelle.

1

Satz (Quadratischer Faktor):

Das Produkt aus den Linearfaktoren $(x - z_1)$ und $(x - \bar{z}_1)$ ist Polynom 2. Grades
mit ausschließlich reellen Koeffizienten.

2

Satz (Polynom-Zerlegung):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$ Polynom vom Grad n .
Dann lässt sich p zerlegen in lineare und quadratische
Faktoren mit reellen Koeffizienten:

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^r (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s n_j = n$.

3

Satz (Nullstellenpaar):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ und
sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine m -fache Nullstelle von p , d.h. $p(\alpha) = 0$.

Dann ist $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ ebenfalls m -fache Nullstelle.

1

Sat
Da:
mit

Satz (Nullstellenpaar):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine m -fache Nullstelle von p , d.h. $p(\alpha) = 0$. Dann ist $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ ebenfalls m -fache Nullstelle.

1

Sat
Da:
mit

Bemerkung: Fundamentalsatz der Algebra: p vom Grad $n \Rightarrow p$ hat n Nullstellen

- Grad n ungerade: p hat mindestens eine reelle Nullstelle.
- Grad n gerade: r Anzahl reelle Nullstellen von p gerade (möglich: $r = 0$).

Satz (Quadratischer Faktor):

Das Produkt aus den Linearfaktoren $(x - z_j)$ und $(x - \bar{z}_j)$ ist Polynom 2. Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten.

2

Satz (Polynom-Zerlegung):

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$ Polynom vom Grad n .

Dann lässt sich p zerlegen in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten:

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^r (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^r m_k + 2 \sum_{j=1}^s n_j = n$.

3

Partialbruchzerlegung

Bemerkung (Gebrochen Rationale Funktion):
Eine rationale Funktion ist entweder

- ganze rationale Funktion (Polynom), oder
- gebrochen rationale Funktion (Polynombruch):

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

Dabei sind $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome n -ten bzw. m -ten Grades (schreibe: $\deg(p_n) = n$ bzw. $\deg(q_m) = m$).

Gebrochen rationale Funktionen können **echt** ($n < m$) oder **unecht** ($n \geq m$) sein.

Bemerkung: Sei $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ gebrochen rational mit $n = \deg(p_n) \geq \deg(q_m) = m$. Dann gibt es eindeutige Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p_n(x) = s(x)q_m(x) + r(x).$$

Dabei ist $\deg(r) < \deg(q_m) = m$ und $\deg(s) = n - m$.

- Möglich: $r(x) \equiv 0$. Dann teilt q_m p_n und $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x)$.

- Falls $r(x) \neq 0$, dann $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$ mit $\frac{r(x)}{q_m(x)}$ echt gebrochen rational.

4

Satz (Reelle Partialbruchzerlegung):

Seien $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad n bzw. m , $n < m$.

Mit der Faktorenanalyse von $q_m(x)$ existiert für das echt gebrochen rationale Polynom $r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ genau eine Zerlegung in **Partialbrüche**:

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{a_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{a_{21}}{x^2 - x_2} + \frac{a_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{a_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{a_{k1}}{x^2 - x_k} + \frac{a_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{a_{km_k}}{(x - x_k)^{m_k}} \\ &+ \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{b_{1n_1}x + c_{1n_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{b_{21}x + c_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \dots + \frac{b_{2n_2}x + c_{2n_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{n_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{b_{k1}x + c_{k1}}{x^2 + p_kx + q_k} + \dots + \frac{b_{kn_k}x + c_{kn_k}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{n_k}} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sind eindeutig bestimmt (und bestimmbar).

Erinnerung:

q_m kann in der **Faktorenanalyse** dargestellt werden:

$$q_m(x) = a_m \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^l (x^2 + p_jx + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{i=1}^k m_i + 2 \sum_{j=1}^l n_j = m$, $x_i, x_k \in \mathbb{R}$ Nullstellen, $x^2 + p_jx + q_j = (x - w_j)(x - \bar{w}_j)$ mit $w_j, \bar{w}_j \in \mathbb{C}$ Nullstellenpaare.

Bemerkung (Gebrochen Rationale Funktion):
Eine rationale Funktion ist entweder

- **ganze rationale Funktion** (Polynom), oder
- **gebrochen rationale Funktion** (Polynombruch):

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

Dabei sind $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome n -ten bzw. m -ten Grades
(schreibe: $\deg(p_n) = n$ bzw. $\deg(q_m) = m$).

Gebrochen rationale Funktionen können **echt** ($n < m$) oder **unecht** ($n \geq m$) sein.

Bem
Dann

Dabe

•

•

Bemerkung: Sei $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ gebrochen rational mit $n = \deg(p_n) \geq \deg(q_m) = m$.
Dann gibt es eindeutige Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p_n(x) = s(x)q_m(x) + r(x).$$

Dabei ist $\deg(r) < \deg(q_m) = m$ und $\deg(s) = n - m$.

- Möglich: $r(x) \equiv 0$. Dann teilt q_m p_n und $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x)$.
- Falls $r(x) \not\equiv 0$, dann $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$ mit $\frac{r(x)}{q_m(x)}$ echt gebrochen rational.

sein.

4

Erinnerung:

q_m kann in der **Faktorenzerlegung** dargestellt werden:

$$q_m(x) = a_n \prod_{k=1}^{\rho} (x - x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\sigma} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^{\rho} m_k + 2 \sum_{j=1}^{\sigma} n_j = n$, $x_k \in \mathbb{R}$ Nullstellen, $x^2 + p_j x + q_j = (x - w_j)(x - \bar{w}_j)$
mit $w_j, \bar{w}_j \in \mathbb{C}$ Nullstellenpaare.



Satz (Reelle Partialbruchzerlegung):

Seien $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad n bzw. m , $n < m$.

Mit der Faktorenerlegung von $q_m(x)$ existiert für das echt gebrochen rationale Polynom $r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ genau eine Zerlegung in **Partialbrüche**:

Erinneru
 q_m kann

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{a_{21}}{x - x_2} + \frac{a_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{a_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} \\ &+ \vdots \\ &+ \frac{a_{\rho 1}}{x - x_\rho} + \frac{a_{\rho 2}}{(x - x_\rho)^2} + \dots + \frac{a_{2m_\rho}}{(x - x_\rho)^{m_\rho}} \\ &+ \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{b_{1n_1}x + c_{1n_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{b_{21}x + c_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \dots + \frac{b_{2n_2}x + c_{2n_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{n_2}} \\ &+ \vdots \\ &+ \frac{b_{\sigma 1}x + c_{\sigma 1}}{x^2 + p_\sigma x + q_\sigma} + \dots + \frac{b_{\sigma n_\sigma}x + c_{\sigma n_\sigma}}{(x^2 + p_\sigma x + q_\sigma)^{n_\sigma}}. \end{aligned}$$

mit $\sum_{k=1}^{\rho} w_{j,k}$
mit $w_{j,\ell}$

Die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sind eindeutig bestimmt (und bestimmbar).



Bemerkungen:

- Je Nullstelle/Nullstellenpaar existieren Vielfachheit-viele Partialbrüche
- Die Struktur der reellen/komplexen Partialbrüche ist offensichtlich
- Für die Koeffizienten entsteht nach Multiplikation mit $q_m(x)$

$$p_n(x) = b_{m-1}(x), \quad n \leq m - 1.$$

- Koeffizientenvergleich von p_n und b_{m-1} ergibt Gleichungssystem für a, b, c .

5

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Integration der Partialbrüche

Bemerkung (Strategie für die Partialbruchzerlegung):

1. Gegebenenfalls **Polynomdivision** um echt gebrochene rationale Funktion zu erhalten.
2. Bestimmung der **Nullstellen des Nennerpolynoms** bzw. Zerlegung in lineare/quadratische Faktoren.
3. Ansatz für die **Partialbrüche** nach Satz.
4. Bestimmung der **Koeffizienten**.

Beobachtung (Integration der Partialbruchzerlegung): Zur Berechnung der Stammfunktion einer echt gebrochenen rationalen Funktion

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)} dx$$

reicht es nun, die folgenden Integrale zu bilden:

$$\int \frac{a}{(x-x_2)^n} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^2} dx$$

2. Fall Löse

$$\int \frac{Ax+c}{(x^2+px+q)^2} dx = I_2$$

für $\beta = 1$ durch Umformung und Substitution (Bürwell S. 149):

$$I_2 = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{c-pA}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C.$$

Für $\beta > 1$ erhält man (Bürwell S. 149):

$$I_2 = \frac{a}{2(\beta-1)(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \left(c - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta}}$$

wobei das Integral rechts mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta}} = \frac{1}{(\beta-1)(4q-p^2)} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \frac{2(2\beta-3)}{(\beta-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta-1}}$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta}} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

gelöst wird.

1. Fall Löse

$$\int \frac{a}{(x-x_2)^n} dx$$

durch Substitution $t = (x-x_2)$:

$$\int \frac{a}{(x-x_2)^n} dx = a \int \frac{1}{t^n} dt = \begin{cases} a \ln|x-x_2| & \text{für } \alpha = 1, \\ a \frac{1}{1-\alpha} (x-x_2)^{-\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Bemerkung (Strategie für die Partialbruchzerlegung):

1. Gegebenenfalls **Polynomdivision** um echt gebrochen rationale Funktion zu erhalten.
2. Bestimmung der **Nullstellen des Nennerpolynoms** bzw. Zerlegung in lineare/quadratische Faktoren.
3. Ansatz für die **Partialbrüche** nach Satz.
4. Bestimmung der **Koeffizienten**.

Bemerkung (Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten):

- **Koeffizientenvergleich** führt auf eindeutig lösbares Gleichungssystem.
- **Grenzwertmethode**: Streng genommen gilt $p_n(x) = b_{m-1}(x)$ nur für $x \neq x_1, x_2, \dots, x_\rho$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow x_j} p_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_j} b_{m-1}(x)$$

betrachtet wird. Im Beispiel wird der Grenzwert durch einsetzen von $x = x_j$ bestimmt.

- **Methode des Zuhaltens** für Linearfaktoren.

Beobachtung (Integration der Partialbruchzerlegung): Zur Berechnung der Stammfunktion einer echt gebrochen rationalen Funktion

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)} dx$$

reicht es nun, die folgenden Integrale zu bilden:

$$\int \frac{a}{(x - x_j)^\alpha} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^\beta} dx$$

Beobachtung (Integration der Partialbruchzerlegung): Zur Berechnung der Stammfunktion einer echt gebrochen rationalen Funktion

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)} dx$$

reicht es nun, die folgenden Integrale zu bilden:

$$\int \frac{a}{(x - x_j)^\alpha} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^\beta} dx$$

Betrachte beide Integraltypen getrennt.

1. Fall:Löse

$$\int \frac{a}{(x - x_j)^\alpha} dx$$

durch Substitution $t = (x - x_j)$:

$$\int \frac{a}{(x - x_j)^\alpha} dx = a \int \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} a \ln |x - x_j| & \text{für } \alpha = 1, \\ a \frac{1}{1-\alpha} (x - x_j)^{-\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

2. Fall:Löse

$$\int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^\beta} dx =: I_B$$

für $\beta = 1$ durch Umformung und Substitution (Bärwolff S. 149):

$$I_B = \frac{b}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{c - p\frac{b}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right) + C.$$

Für $\beta > 1$ erhält man (Bärwolff S. 149f.):

$$I_B = -\frac{b}{2(\beta - 1)(x^2 + px + q)^{\beta-1}} + (c - \frac{bp}{2}) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\beta},$$

wobei das Integral rechts mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{1}{(\beta - 1)(4q - p^2)} \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}} + \frac{2(2\beta - 3)}{(\beta - 1)(4q - p^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}}$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right)$$

gelöst wird.

Erinnerung: Integrationsregeln

Integration durch Substitution
Bei einem Integranden $f(g(x)) \cdot g'(x)$ in der Form $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ kann man $u = g(x)$ setzen und erhält $\int f(u) du$.
Beispiel: $\int \sin(x) \cos(x) dx = \int \sin(u) du = -\cos(u) + C = -\cos(x) + C$

Integration durch partielle Integration
Bei einem Integranden $f(x) \cdot g'(x)$ wählt man $u = f(x)$ und $v = g(x)$.
Beispiel: $\int x \cdot \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$

Integration der Partialbrüche

Integration durch Partialbruchzerlegung
Für eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ zerlegt man den Nenner in Linear- und Quadratenfaktoren.
Beispiel: $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

Exkurs: Polynome mit reellen Koeffizienten

Ziel: Polynome lassen sich leicht integrieren!

Nullstellen
Für ein Polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten existieren reelle Nullstellen.
Beispiel: $P(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Analysis II

Partialbruch- zerlegung

Bestimmung (Störansatz-Formel)
Für eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und $Q(x) = (x-a)^k \cdot (x^2+bx+c)^l$ hat die Partialbruchzerlegung die Form:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{j=1}^l \frac{B_j x + C_j}{x^2 + b_j x + c_j}$$

Bestimmung (Störansatz-Formel)
Für eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und $Q(x) = (x-a)^k \cdot (x^2+bx+c)^l$ hat die Partialbruchzerlegung die Form:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{j=1}^l \frac{B_j x + C_j}{x^2 + b_j x + c_j}$$

Bestimmung (Störansatz-Formel)
Für eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und $Q(x) = (x-a)^k \cdot (x^2+bx+c)^l$ hat die Partialbruchzerlegung die Form:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{j=1}^l \frac{B_j x + C_j}{x^2 + b_j x + c_j}$$

Bestimmung (Störansatz-Formel)
Für eine rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und $Q(x) = (x-a)^k \cdot (x^2+bx+c)^l$ hat die Partialbruchzerlegung die Form:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{j=1}^l \frac{B_j x + C_j}{x^2 + b_j x + c_j}$$