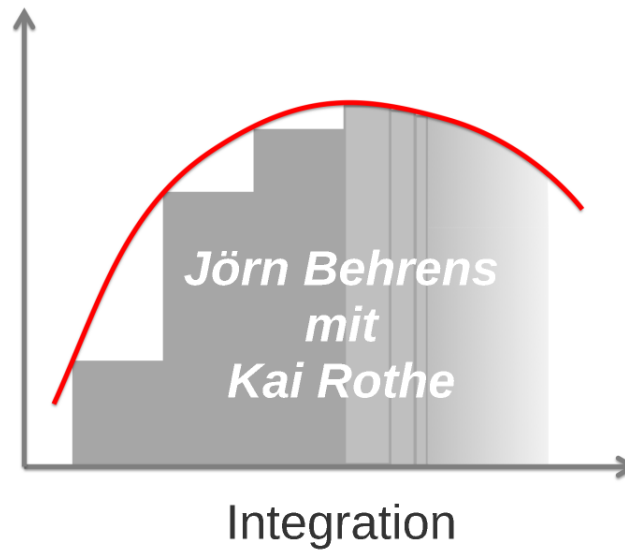


Analysis II



Buch Kapitel 2.13

Ihr Professor

Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CEN
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

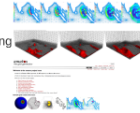
Kurz-CV



seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung
Adaptive Atmosphären Modellierung
Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen



nd



va2127m.html

ten!

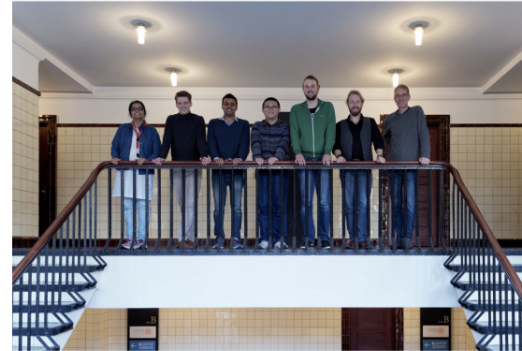
Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CEN
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

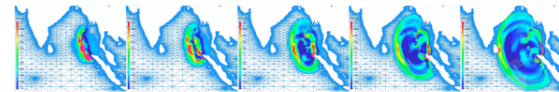
Kurz-CV



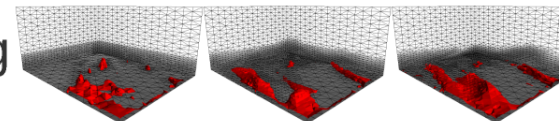
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen

amatos
the grid generator

Welcome to the amatos project home

amatos is an Adaptive Mesh generator for Atmospheric and Oceanic Simulation.

amatos is developed, tested and maintained at the Leibniz Institute of Atmospheric and Space Research.

What you can find in this page:

- Home: Overview of amatos
- Overview: Overview of amatos
- Download: Download amatos
- User manual: User manual
- Code: Source code of amatos
- Project: Project information
- Contact: Contact information
- License: License information
- The amatos project and its supporting system (see below)

Example grids created with amatos

Infos zum Kurs

Literatur

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.
R. Ansoorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K. Vettors: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

<https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/teachingmaterials/2017/hs.html>

Bitte gründlich vorbereiten!

Informationen Online

Stud.IP:

Analysis II: <https://t1p.de/s0lm>

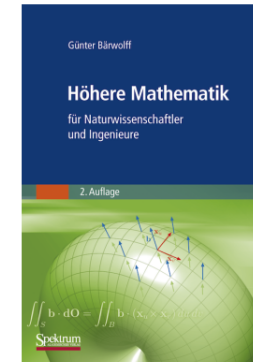


Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/17/lm.html>

Bitte gründlich vorbereiten!

Informationen Online

Stud.IP:

Analysis II: <https://t1p.de/s0lm>



Erinnerung: Kurven

Definition

Definition (Kurve im \mathbb{R}^2)
Sei $I \subset \mathbb{R}^1$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in \mathbb{R}^2 mit

- Anfangspunkt $x(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$,
- Endpunkt $x(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$,
- Spur $\{x(t) \mid a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T$$
Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

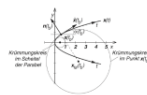
$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0$$
Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$
Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.
Eine **Anderung** von Kurvenstücken K_1 ($t = 1$) wobei der Anfangspunkt von K_2 dem Endpunkt von K_1 ($t = 2$) entspricht, heißt **Kurve**.
(Es gibt ein Eindeutigkeitskriterium, wenn man die Kurve bestimmen will.)

Krümmungskreis

Bemerkung (Krümmungskreis)
Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(x_0) = \frac{1}{\kappa(x_0)}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $x(t) = (x(t), y(t))^T$ heißt **Tangentenvektor**,
- $n(t) = (-y'(t), x'(t))^T$ heißt **Normalenvektor**,

der Kurve $x(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$
heißt **Differential der Bogenlänge** (oder **Bogenelement**), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung, Krümmungsradius

Definition:
Die **Krümmung** einer regulären Kurve $x(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff. baren Funktionen $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t) = (t, f(t))^T$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}^{3/2}}$$

$R = \frac{1}{\kappa}$ heißt **Krümmungsradius**.



Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^2)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt** $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$,
- **Endpunkt** $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$,
- **Spur** $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i ($i = 1 : r$), wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} ($i = 2 : r$) entspricht, heißt **Kurve**.

Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^{\top}$ heißt **Tangentenvektor**,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^{\top}$ heißt **Normalenvektor**,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^{\top}$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung, Krümmungsradius

Definition:

Die **Krümmung** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^T$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

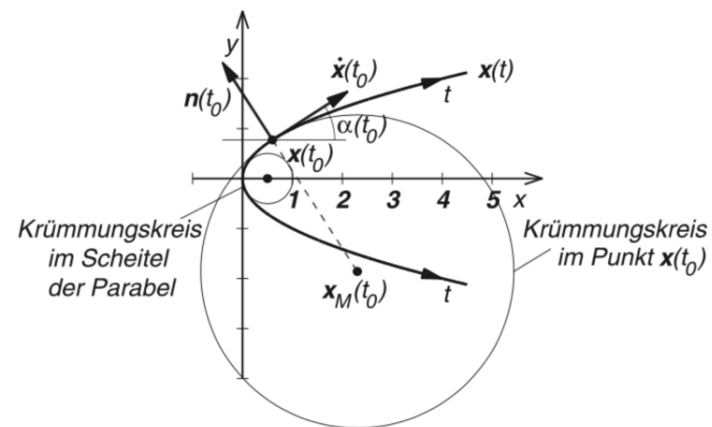
$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt **Krümmungsradius**.

Krümmungskreis

Bemerkung (Krümmungskreis):

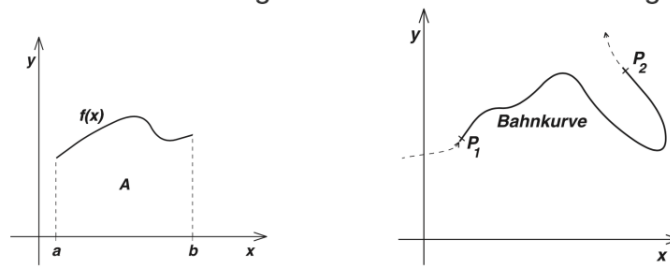
Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Integrale Motivation

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen



Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f . Ist F Stammfunktion von f , so heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

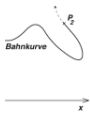
mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.

1

n

er Bahnlängen



Integrationsreg

Definition:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f . Ist F Stammfunktion von f , so heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.



Integrationsregeln

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx.$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Definition. \square

Satz (Substitutionsregel):

Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt$, mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$, mit $x = \phi(t)$.

Beweis:

Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(\phi(x))]'' = F'(\phi(x))\phi'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. \square

Bemerkung (Partielle Integration):

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx, \text{ bzw.}$$
$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

3

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx.$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Definition. \square

Satz (Substitution)
Sei f stetig auf dem Intervall J

1. $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$

2. $\int f(x) dx = \int f(g(x)) g'(x) dx$

Beweis:

Folgt aus dem Satz

mit $F'(x)$

∈ ℝ Kon-

Satz (Substitutionsregel):

Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt$, mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$, mit $x = \phi(t)$.

Beweis:

Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. □

Algorithmus (Substitutionsregel):

Der Satz lässt sich anwenden:

1. Ersetze $\phi(x)$ durch t (Substitution).
2. Wegen $\frac{dt}{dx} = \phi'(x)$ ersetze $\phi'(x) dx$ durch dt .
3. Berechne $\int f(t) dt$ (statt $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx$).
4. Ersetze t durch $\phi(x)$ (Rücksubstitution).

2

Bemerkung (Partielle Integration):

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx, \text{ bzw.}$$
$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

3



Erinnerung: Kurven

Definition

Tangenten, Normale, Stützgeraden

Krümmungsradius

Krümmungszentrum

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $F' = f$

Stammfunktion von f ist F Stammfunktion von f , es heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.



Integrationsregeln

Bei Summe oder Produkt zweier Funktionen

Bei Produkt zweier Funktionen

Bei Quotient zweier Funktionen

Bei Potenzfunktionen

Bei Exponentialfunktionen

Bei Logarithmusfunktionen

Bei Sinus- und Cosinusfunktionen

Bei Tangensfunktionen

Infos zum Kurs

Lehrer

Übersicht und Syllabus

Informationen über den Kurs

Ihr Professor

Kontakt

Publikationen

Forschungsinteressen

1. Blauhoff S. 1: Beispiele
 - 1) Die Funktion gilt $F'(x) = f(x)$
 - 2) Die Funktion gilt $F'(x) = f(x) + C$
 - 3) Die Funktion gilt $F'(x) = f(x) + C$
2. Blauhoff S. 12
3. Blauhoff S. 1