

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

- a) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

(i) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3 + x^2} dx,$

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}} dx,$

- b) Mit Hilfe des Integral-Kriteriums für Reihen zeige man, dass für $\alpha > 1$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

absolut konvergiert.

- c) Man berechne den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} + 3^{k+2}}{9^{k+1}}.$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}.$

- a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.
- b) Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_0 verwendet?

- c) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01?

- d) Wie lauten die ersten zwei Nachkommastellen des Grenzwertes S ?

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+5} \right)^n$,
- b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k2^k}$,
- c) $\frac{4}{6} + \frac{8}{11} + \frac{12}{16} + \frac{16}{21} + \frac{20}{26} + \dots$,
- d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$.

Aufgabe 20:

- a) Man untersuche die Funktionenfolgen

(i) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}$,

(ii) $g_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{n}{n+1+nx^2}$,

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

- b) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbe-
reich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige)
vorliegt.

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^k}$, (ii) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$.

Besprechungstermine: 9.6. - 11.6.21