Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13:

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx$ unter Verwendung der Substitution $t = e^x$,

b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx$ unter Verwendung der Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

Lösung:

a) Substitution: $t = e^x \;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{t}, \quad t_0 = e^0 = 1,\; t_1 = e^{\ln(3)} = 3$

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{t^2+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int_1^3 \frac{1}{t^2(t+1)}\,dt$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} \quad\Rightarrow\quad 1 = At(t+1) + B(t+1) + Ct^2$$

Nennernullstelle $t = 0$ einsetzen: $\quad 1 = B$

Nennernullstelle $t = -1$ einsetzen: $\quad 1 = C$

$t = 1$ einsetzen: $\quad 1 = 2A + 2B + C = 2A + 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1$

$$\int_1^3 \frac{1}{t^2(t+1)}\,dt = \int_1^3 -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1}\,dt = -\ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|t+1|\Big|_1^3 = \frac{2}{3} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

alternativ mit Rücksubstitution der Stammfunktion und den alten Grenzen:

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^{2x} + e^x}dx = ... = \left(-x - \frac{1}{e^x} + \ln|e^x + 1|\right)\Big|_0^{\ln(3)} = \frac{2}{3} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 0.2612015...$$

b) Substitution:

$$\tan\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1},\ dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \qquad t_0 = \tan\frac{\pi}{8},\ t_1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx = \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(\pi/4)} \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}}\,\frac{2dt}{t^2+1} = \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(\pi/4)} \frac{dt}{t} = \ln|t|\big|_{\tan(\pi/8)}^{\tan(\pi/4)} = -\ln\left|\tan\frac{\pi}{8}\right|$$

alternativ mit Rücksubstitution der Stammfunktion und den alten Grenzen:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx = ... = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\ln\left|\tan\frac{\pi}{8}\right| = 0.8813735...$$

Aufgabe 14:

a) Man berechne den Flächeninhalt F, der durch die Teilmenge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 \colon x^3 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

des $\mathrm{I\!R}^2$ gegeben ist.

b) Die Gerade $y = x/2 + 1$ zerteilt den Kreis $x^2 + y^2 = 4$ in zwei Segmente. Wieviel Prozent an Fläche verliert der Kreis durch das Abtrennen des kleineren der beiden Segmente?

Lösung:

a) Die Schnittpunkte von $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^3$ ergeben sich durch

$$\sqrt{x} = x^3 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^6 - x = x(x^5 - 1)\,.$$

Nur zwischen den Schnittpunkten $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ gilt $g(x) \le y \le f(x)$. Daher berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^3\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

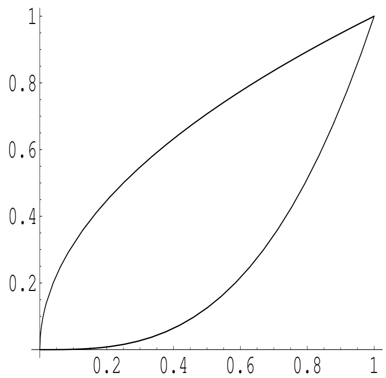

Bild 14 a): Menge M

b) Schnittpunkte von Gerade und Kreis:

$$4 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = \frac{5x^2}{4} + x + 1 \;\Rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = \frac{6}{5}$$

Fläche des kleineren Segments:

$$S = \int_{-2}^{6/5} \sqrt{4 - x^2}\,dx - \int_{-2}^{6/5} x/2 + 1\,dx$$

$$\int_{-2}^{6/5} x/2+1\,dx = \left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_{-2}^{6/5} = \frac{64}{25}$$

Mit partieller Integration erhält man:

$$\int \cos^2 t\,dt = \cos t \sin t + \int \sin^2 t\,dt = \cos t \sin t + \int 1-\cos^2 t\,dt \;\Rightarrow$$

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) + C$$

Das Integral $\int_{-2}^{6/5} \sqrt{4-x^2}\,dx$ wird gelöst durch Substitution

$x = 2\sin t \;\Rightarrow\; dx = 2\cos(t)\,dt\,.$

Integrationsgrenzen:

$6/5 = 2\sin t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \arcsin\frac{3}{5}\,,$

$-2 = 2\sin t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-2}^{6/5} \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\arcsin 3/5} \left(\sqrt{4-4\sin^2 t}\right) 2\cos t\,dt \;= 4\int_{-\pi/2}^{\arcsin 3/5} \cos^2 t\,dt$$

$$= 2\,(t+\sin t\cos t)\big|_{-\pi/2}^{\arcsin 3/5} = 2\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\cos\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5}\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{3}{5}} + \pi = 2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{24}{25} + \pi$$

$$\Rightarrow \quad S = 2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{8}{5} + \pi = 2.828594871$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S}{4\pi} = \frac{282.8594871}{4\pi}\% = 22.50924279\%$$

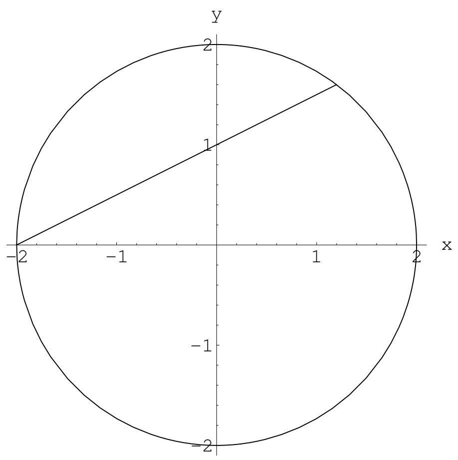

Bild 14 b): Kreissegmente

Aufgabe 15:

Gegeben sei die Funktion

$$f \,:\, [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x\,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$ Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$ Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$ Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelfächen der Rotationskörper aus a) und b) mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezsurf'.

Lösung:

a) Mit partieller Integration und Additionstheorem erhält man:

$$\int (\sin x)^2\, dx = \int \sin x \sin x\, dx = -\sin x \cos x + \int (\cos x)^2\, dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 - (\sin x)^2\, dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int (\sin x)^2\, dx + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad \int (\sin x)^2\, dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x) + C$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} V_{x-\text{Achse}} &= \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\, dx \\ &= \frac{\pi}{2}\,(x - \sin x \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

b) Bei Rotation um die y-Achse ist der Abstand vom Funktionsgraphen zur y-Achse gegeben durch $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Mit der Substitution $y = \sin x$ und partieller Integration erhält man

$$V_{y-\text{Achse}} = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2\, dy = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2\, dy = \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$$

$$= \pi \left(x^2 \sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx \right) = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} + 2x \cos x\Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx \right)$$

$$= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$$

c) Unter Verwendung von $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ergibt sich

$$\int \sqrt{1+s^2}\, ds \overset{s=\sinh t}{=} \int \cosh^2 t\, dt = \sinh t \cosh t - \int \sinh^2 t\, dt$$

$$= \sinh t \cosh t + t - \int \cosh^2 t\, dt + \tilde{C} \quad \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{1+s^2}\, ds = \frac{1}{2}\left(s\sqrt{1+s^2} + \operatorname{arsinh} s \right) + C$$

Die Mantelfläche berechnet sich dann durch:

$$M_{x-\text{Achse}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$\overset{s=\cos x}{=} -2\pi \int_1^0 \sqrt{1+s^2}\, ds = \pi \left(s\sqrt{1+s^2} + \operatorname{arsinh} s \right)\Big|_0^1 = \pi \left(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1 \right)$$

d) Für den Flächenplot muss der Vektor des Funktionsgraphen $\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ mit $0 \le x \le \pi/2$ und $f(x) = \sin x$ zunächst in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden, also auf $\boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ erweitert werden.

Anschließend wird $\boldsymbol{v}(x)$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}(\varphi)$ multipliziert, wobei eine ganze Umdrehung durch $0 \le \varphi \le 2\pi$ erreicht wird.

Für die Drehung um die x-Achse erhält man damit die folgende Parameterdarstellung der Mantelfläche

$$\boldsymbol{u}_{x-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x \\ \cos\varphi \sin x \\ \sin\varphi \sin x \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 a) lautet damit:

```
ezsurf('x','cos(p)*sin(x)','sin(p)*sin(x)',[0,2*pi,0,pi/2])
```

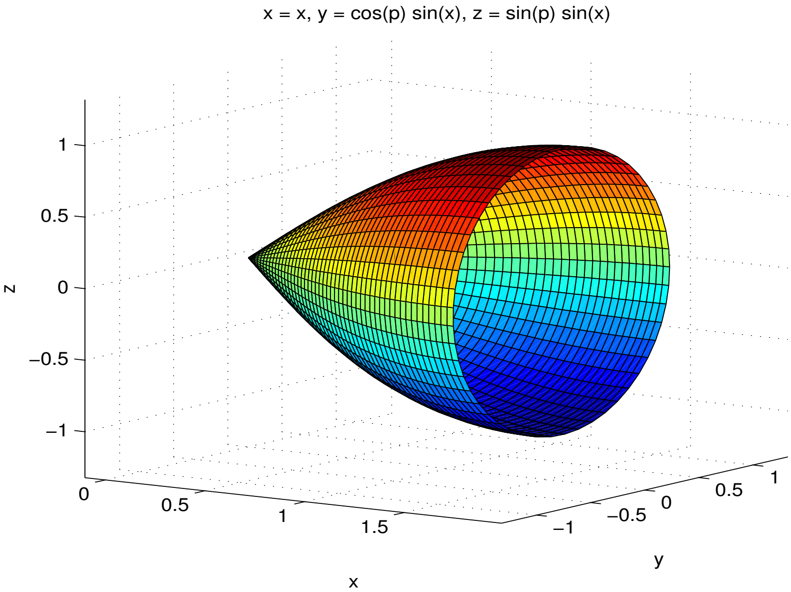

Bild 15 a) Rotation um die x-Achse

$$\boldsymbol{u}_{\,y-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}\,(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}\,(x)} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ \sin x \\ x\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 b) lautet:

```
ezsurf('x*cos(p)','sin(x)','x*sin(p)',[0,2*pi,0,pi/2])
```

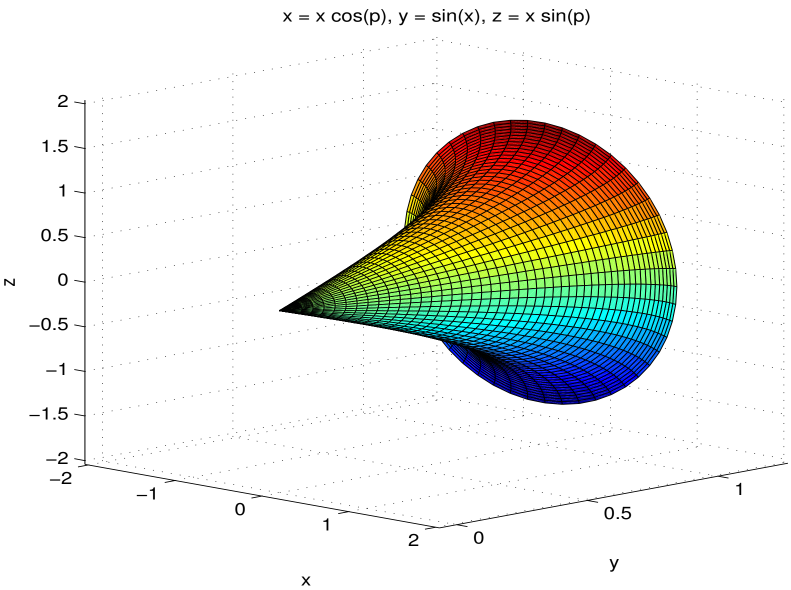

Bild 15 b) Rotation um die y-Achse

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x) \;=\; \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln(xt)\,dt\;.$$

b) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\int\limits_{-4}^{4} \frac{1}{(x-4)^{2/3}}\,dx\;,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx\;.$

c) Man berechne für $f(t) = \sin(\omega t)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte

$$F(x) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-xt}\,dt\;, \quad x > 0.$$

Lösung:

a) $$F'(x) \;=\; \ln(x\cdot x^3)3x^2 - \ln(x\cdot x^2)2x + \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{t}{x\cdot t}\,dt$$

$$= \; 12x^2\ln(x) - 6x\ln(x) + \frac{1}{x}\,(x^3 - x^2)$$

$$= \; (12x^2 - 6x)\ln(x) + x^2 - x\;.$$

b) (i) Das uneigentliche Integral existiert, denn

$$\int\limits_{-4}^{4} \frac{1}{(x-4)^{2/3}}\,dx = \lim_{a\to 4-}\int\limits_{-4}^{a} \frac{dx}{(x-4)^{2/3}}$$

$$= \lim_{a\to 4-} 3(x-4)^{1/3}\Big|_{-4}^{a}$$

$$= -3(-4-4)^{1/3} = 6\;.$$

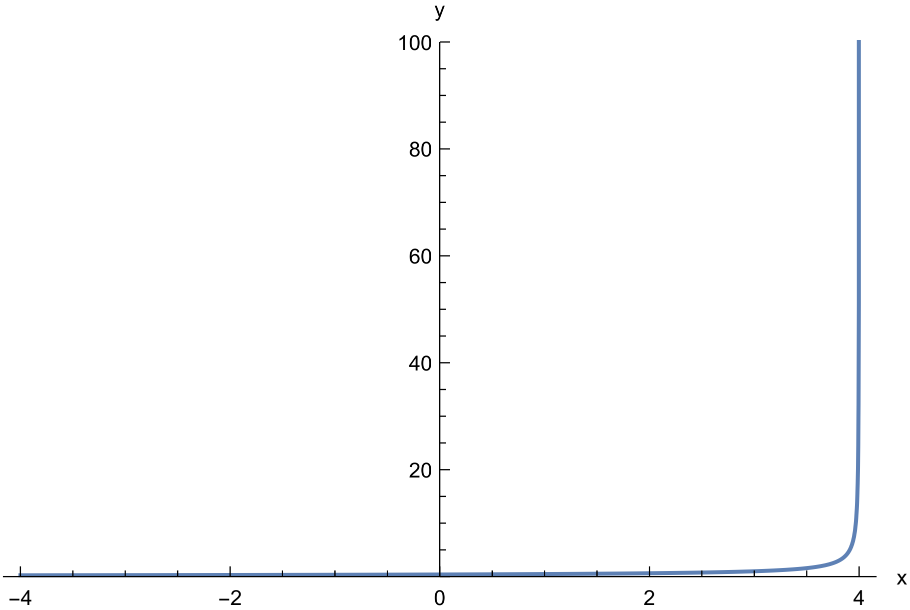

Bild 16 b) (i) $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^{2/3}}$

(ii) Das uneigentliche Integral existiert nicht, denn

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1+} \int_a^2 \frac{dx}{x-1}$$
$$= \lim_{a\to 1+} \ln(x-1)\Big|_a^2$$
$$= \lim_{a\to 1+} \left(-\ln(a-1)\right) = \infty\ .$$

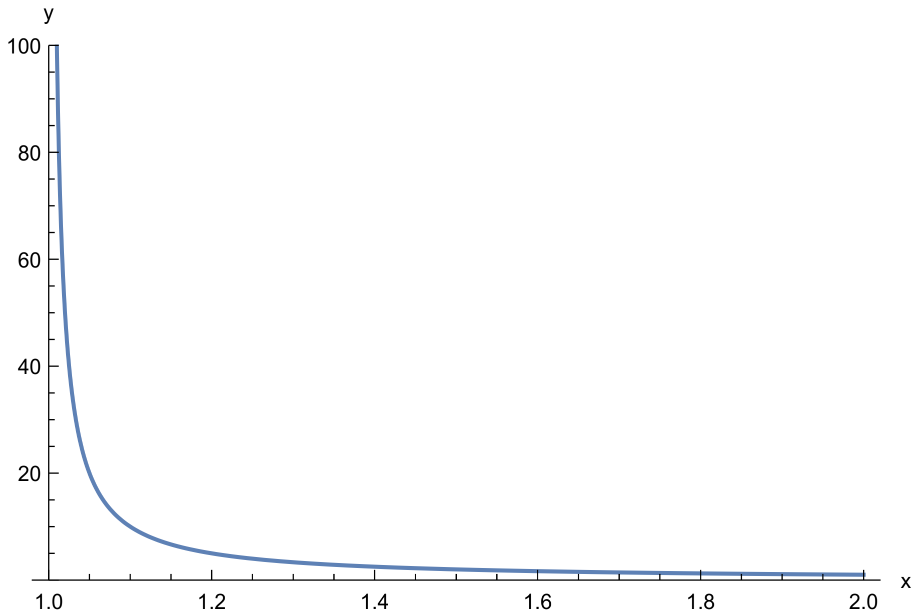

Bild 16 b) (ii) $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

c) Die Berechnung erfolgt über partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin(\omega t)e^{-xt}\,dt &= -\frac{\sin(\omega t)e^{-xt}}{x} + \int \frac{\omega}{x}\cos(\omega t)e^{-xt}\,dt + C \\
&= -\frac{\sin(\omega t)e^{-xt}}{x} - \frac{\omega\cos(\omega t)e^{-xt}}{x^2} - \int \frac{\omega^2}{x^2}\sin(\omega t)e^{-xt}\,dt + C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{\omega^2}{x^2}\right)\int \sin(\omega t)e^{-xt}\,dt = -e^{-xt}\left(\frac{x\sin(\omega t)+\omega\cos(\omega t)}{x^2}\right) + C$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int_0^a \sin(\omega t)e^{-xt}\,dt &= -\left.\frac{e^{-xt}(x\sin(\omega t)+\omega\cos(\omega t))}{x^2+\omega^2}\right|_0^a \\
&= \frac{\omega}{x^2+\omega^2} - \frac{e^{-xa}(x\sin(\omega a)+\omega\cos(\omega a))}{x^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \sin(\omega t)e^{-xt}\,dt = \frac{\omega}{x^2+\omega^2}$$

Besprechungstermine: 26.5. - 28.5.21