**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

# Analysis II

# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

# Eigenschaften des bestimmten Integrals

**Satz:**

Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ und integrierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

a) **Linearität** $$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \, , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

b) **Monotonie** $$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \, , \quad \text{falls } f(x) \leq g(x),$$

c) $$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx,$$

d) $$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

e) Speziell wird definiert:

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx := 0 \, .$$

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

a) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von $f$.

b) Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b \ .$$

# Integrationsregeln

**Satz: Partielle Integration**

Für stetig differenzierbare Funktionen $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx \ .$$

**Satz: Substitutionsregel**

Die Funktion $g : [a,b] \to [c,d]$ sei stetig differenzierbar, es existiere die Umkehrfunktion $g^{-1}$ zu $g$ und die stetige Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ besitze die Stammfunktion $F$, dann gilt

a) $$\int\limits_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = F(x)\big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(t))\big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \ ,$$

b) $$\int\limits_c^d f(x)\,dx = \int\limits_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)\,dt = \tilde{F}(t)\Big|_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} = \tilde{F}(g^{-1}(d)) - \tilde{F}(g^{-1}(c)) = F(d) - F(c) \ .$$

**Merkregel:**

a) $t = g^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(t) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = g'(t) \quad \leftrightarrow \quad dx = g'(t)dt$

b) $c = g(t_a)\ ,\ d = g(t_b) \quad \Rightarrow \quad t_a = g^{-1}(c)\ ,\ t_b = g^{-1}(d)$

**Berechnung von** $\displaystyle\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\,dx$

Die Substitution: $\quad t = e^x \;\Leftrightarrow\; x = \ln t \quad\Rightarrow\quad dx = \dfrac{dt}{t}$

führt auf den Standardfall: $\quad\displaystyle\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\,dx = \int \frac{P(t)}{t\cdot Q(t)}\,dt\;.$

**Berechnung von** $\displaystyle\int \frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}\,dx$

Die Substitution: $\quad t = \tan\dfrac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 2\arctan t \quad\Rightarrow\quad dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$

ergibt nach kurzer Rechnung $(*)$: $\quad \sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}\,,\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$

und führt damit auf den Standardfall:

$$\int \frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}\,dx = \int \frac{2\cdot P\left(\dfrac{2t}{t^2+1},\dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)}{(t^2+1)\cdot Q\left(\dfrac{2t}{t^2+1},\dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)}\,dt\;.$$

Zur kurzen Rechnung $(*)$:

$$\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2\tan(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin x$$

$$\frac{1-t^2}{t^2+1} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \cos x$$

**Aufgabe 13:**

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx$ unter Verwendung der Substitution $t = e^x$,

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx$ unter Verwendung der Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

**Lösung:**

a) Substitution: $t = e^x \;\to\; dx = \dfrac{dt}{t}, \quad t_0 = e^0 = 1,\; t_1 = e^{\ln(2)} = 2$

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx = \int_1^2 \frac{t^3}{t^3+4}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3t^2}{t^3+4}\,dt = \frac{1}{3}\ln(t^3+4)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{12}{5}\right)$$

alternativ mit Rücksubstitution der Stammfunktion und den alten Grenzen:

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx = \cdots = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+4)\Big|_0^{\ln(2)} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{12}{5}\right) = 0.2918229...$$

b) Substitution:

$$\tan\frac{x}{2} = t,\;\; \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1},\;\; dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \qquad t_0 = \tan(0) = 0,\;\; t_1 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}\,\frac{2dt}{t^2+1} = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1-t^2}\,dt \\
&= \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt = \left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right)\Big|_0^{\tan(\pi/8)} \\
&= \ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|
\end{aligned}$$

alternativ mit Rücksubstitution der Stammfunktion und den alten Grenzen:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx = \cdots = \left(\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = 0.8813735...$$

**Aufgabe 14:**

a) Man berechne den Flächeninhalt $F_1$, der sich im Intervall $[-3, 3]$ zwischen $x$-Achse und der durch $y = x^2 - 4$ gegebenen Funktion befindet.

b) Man berechne den Flächeninhalt $F_2$, der Menge des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ eingeschlossen wird.

**Lösung:**

a) Schnittpunkte von $y = x^2 - 4$ mit der $x$-Achse:

$0 = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \;\Rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = 2$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{-3}^{-2} x^2 - 4\,dx - \int_{-2}^{2} x^2 - 4\,dx + \int_{2}^{3} x^2 - 4\,dx \\
&= 2\int_{2}^{3} x^2 - 4\,dx - 2\int_{0}^{2} x^2 - 4\,dx \\
&= 2\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^3 - 2\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\left(\frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8\right) = \frac{46}{3}
\end{aligned}$$

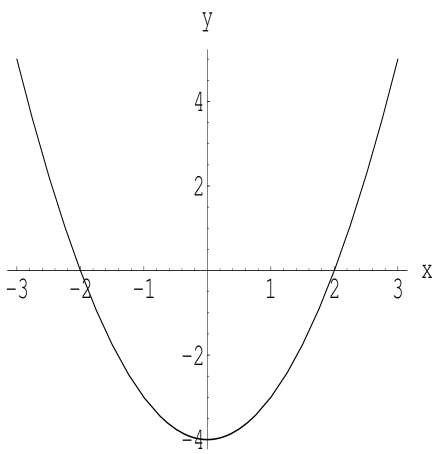


**Bild 14 a):** $y = x^2 - 4$ in $[-3, 3]$

b)

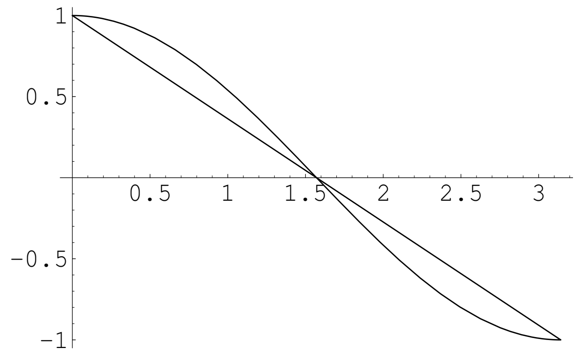


**Bild 14 b):** Menge $M_2$

Die Schnittpunkte von $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ sind gegeben durch

$$x_1 = 0,\ x_2 = \pi/2,\ x_3 = \pi\ .$$

Daher berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} F_2 &= \int\limits_0^{\pi/2} \cos x - (1 - 2x/\pi)\, dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (1 - 2x/\pi) - \cos x\, dx \\ &= 2\left[\sin x - x + x^2/\pi\right]_0^{\pi/2} \ = \ 2\,(1 - \pi/2 + \pi/4) \ = \ 2 - \pi/2\ . \end{aligned}$$

# Rotationskörper

Gegeben sei die durch

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

definierte Funktion. Bei Rotation des Funktionsgraphen von $f$ um die $x$-Achse erhält man

a) **Volumen eines Rotationskörpers**

$$V_{x-\text{Achse}} = \pi \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 \, dx$$

b) **Mantelfläche eines Rotationskörpers**

$$M_{x-\text{Achse}} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Entsprechend erhält man das Volumen eines Rotationskörpers bei **Rotation von $f$ um die $y$-Achse**

$$V_{y-\text{Achse}} = \pi \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 \, dy \, .$$

**Aufgabe 15:**

Gegeben sei die Funktion

$$f\ :\ [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3\,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von $f$ um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von $f$ um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantel- und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von $f$ um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelflächen der Rotationskörper aus a) und b).

**Lösung:**

a)
$$\begin{aligned} V_{x-\text{Achse}} &= \pi\int\limits_0^2 (f(x))^2\ dx = \pi\int\limits_0^2 \left(x^3\right)^2\ dx = \pi\left(\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{128\pi}{7} = 57.4462\ldots \end{aligned}$$

b) $y = f(x) = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$

$$\begin{aligned} V_{y-\text{Achse}} &= \pi\int\limits_0^8 \left(f^{-1}(y)\right)^2\ dy = \pi\int\limits_0^8 \left(y^{1/3}\right)^2\ dy \\ &= \pi\left(\frac{3y^{5/3}}{5}\right)\Bigg|_0^8 = \frac{96\pi}{5} = 60.3185\ldots \end{aligned}$$

c) Die Oberfläche des Rotationskörpers bei Rotation um die $x$-Achse setzt sich zusammen aus der Mantelfläche $M_{x-\text{Achse}}$ und der Fläche $K$ des seitlich begrenzenden Kreises:

$$K = 8^2\pi = 64\pi = 201.0619\ldots$$

$$\begin{aligned} M_{x-\text{Achse}} &= 2\pi\int\limits_0^2 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi\int\limits_0^2 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx \\ &\overset{t=1+9x^4}{=} \frac{2\pi}{36}\int\limits_1^{145} \sqrt{t}\,dt = \left(\frac{2\pi\cdot 2}{36\cdot 3}t^{3/2}\right)\Bigg|_1^{145} \\ &= \frac{\pi}{27}(145^{3/2}-1) = 203.0436\ldots \end{aligned}$$

Damit besitzt der Rotationskörper eine Oberfläche von

$$O = K + M_{x-\text{Achse}} = \frac{\pi(1727+145^{3/2})}{27} = 404.1055\ldots$$

d) Für den Flächenplot muss der Vektor des Funktionsgraphen

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq x \leq 2$ und $f(x) = x^3$ zunächst in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden, also auf

$$\boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erweitert werden.

Anschließend wird $\boldsymbol{v}(x)$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}(\varphi)$ multipliziert, wobei eine ganze Umdrehung durch $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ erreicht wird.

Für die Drehung um die $x$-Achse erhält man damit die folgende Parameterdarstellung der Mantelfläche

$$\boldsymbol{u}_{x-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x \\ x^3\cos\varphi \\ x^3\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 a) lautet damit:

```
ezsurf('x','cos(p)*x^3','sin(p)*x^3',[0,2*pi,0,2])
```

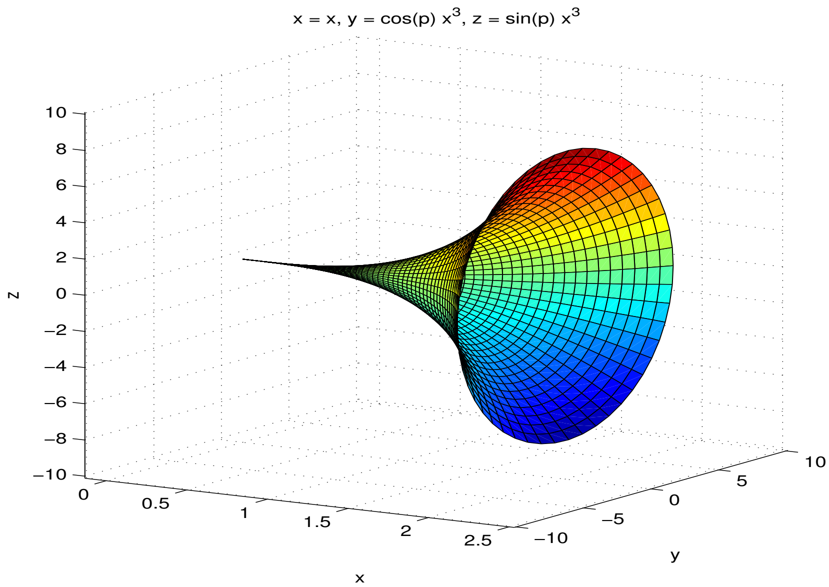


**Bild 15 a):** Rotationskörper für $f(x) = x^3$ bzgl. der $x$-Achse

$$\boldsymbol{u}_{y-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ x^3 \\ x\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 b) lautet:

```
ezsurf('x*cos(p)','x^3','x*sin(p)',[0,2*pi,0,2])
```

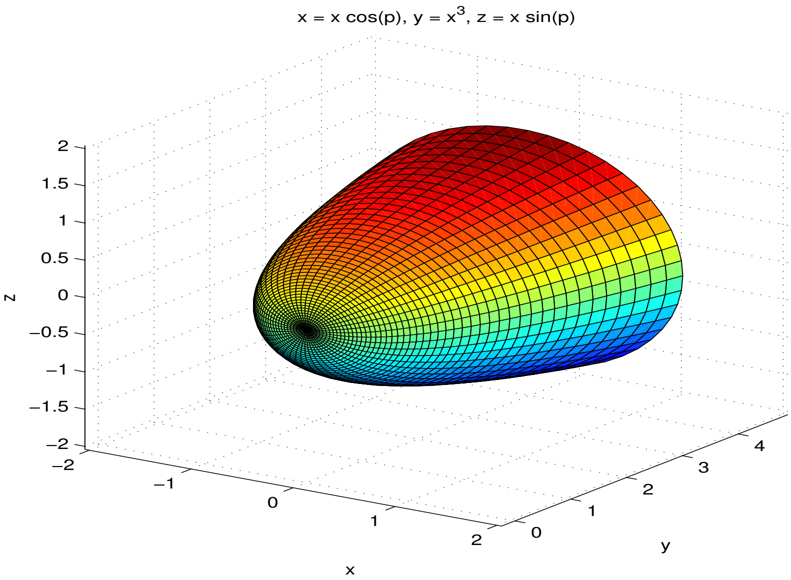


**Bild 15 b):** Rotationskörper bzgl. der $y$-Achse

# Uneigentliche Integrale

**Definition:**

Sei $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ in jedem Teilintervall $[a, c] \subset [a, b[$ mit $c < b$ beschränkt und stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitsstellen.

a) **Singularität an einer Grenze, z.B. Polstelle in** $b$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

b) **einseitig unbeschränkter Definitionsbereich,** '$b = \infty$'

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

Falls der entsprechende Grenzwert existiert, so heißt das uneigentliche Integral **konvergent**, sonst **divergent**.

Für die untere Integrationsgrenze, d.h. $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$, werden entsprechende uneigentliche Integrale definiert.

# Parameterabhängige Integrale

Die reelwertige Funktion $f(x, y)$ sei in $[a, b] \times [c, d]$ stetig bezüglich $x$ und integrierbar bezüglich $y$, dann ist das folgende **parameterabhängige Integral** stetig

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy\,, \quad a \le x \le b.$$

**Beispiel:**

Als **Laplace-Transformierte** zur Funktion $f(t)$ bezeichnet man das vom Parameter $s > 0$ abhängige Integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

**Satz: (Leibniz-Regel)**

Ist die Funktion $f(x, y)$ zusätzlich stetig differenzierbar bezüglich $x$ und sind $g(x)$ und $h(x)$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy\right) = f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\,dy\,.$$

**Aufgabe 16:**

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x) = \int_1^{2x} e^{3x+y}\,dy\,.$$

b) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx\,,$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx\,.$

c) Man berechne für $f(t) = \cos(\gamma t)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ für $s > 0$.

**Lösung:**

a) $$F'(x) = e^{3x+2x}\cdot 2 - e^{3x+1}\cdot 0 + \int_1^{2x} 3e^{3x+y}\,dy$$

$$= 2e^{5x} + 3e^{3x+2x} - 3e^{3x+1} = 5e^{5x} - 3e^{3x+1}\,.$$

b) (i) $$\int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} 12(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon}^9$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12((9-1)^{1/3} - \varepsilon^{1/3}) = 24$$

(ii) $$\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx = \lim_{a\to\infty} 8(x+1)^{1/4}\Big|_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} 8((a+1)^{1/4} - 1) = \infty$$

c) Die Berechnung erfolgt über partielle Integration:

$$\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt = -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^a - \int_0^a \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

$$= -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^a + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a - \int_0^a \gamma^2\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\left(-\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s} + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty}\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s}{s^2+\gamma^2}$$