Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. K. Rothe

SoSe 2021

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Aufgabe 9:

Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3}{5-2x}\,dx$

Substitution: $t = 5 - 2x \quad \rightarrow \quad dt = -2\,dx$

$$\int \frac{3}{5-2x}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|t| + C = -\frac{3}{2}\ln|5-2x| + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx$

Substitution: $t = 7x - 4 \quad \rightarrow \quad dt = 7\,dx$

$$\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{7}t^{-1} + C = -\frac{1}{7(7x-4)} + C = \frac{1}{28-49x} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x - 1}\,dx$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(6x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (2x - 1) = 3x^2 + 1 - \dfrac{2}{2x-1} \\
\underline{-(6x^3 - 3x^2)\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\quad 2x \quad -3 \\
\qquad\qquad\; \underline{-(2x \quad -1)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -2
\end{array}
$$

$$\int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x - 1}\,dx = \int 3x^2 + 1 - \frac{2}{2x-1}\,dx$$

Substitution: $t = 2x - 1 \quad \to \quad dt = 2\,dx$

$$= x^3 + x - \int \frac{1}{t}\,dt + C$$

$$= x^3 + x - \ln|t| + C = x^3 + x - \ln|2x - 1| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx$

$$\int \frac{5}{x^2+2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\,dx$$

Substitution: $\quad t = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; dx = \sqrt{2}\,dt$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan(t) + C$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx$

$$\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Substitution: $\quad t = x^2+1 \;\rightarrow\; dt = 2x\,dx$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{5}{4}\ln|x^2+1| + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx$

$$\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{3(2x+4)-12}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$= 3\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\,dx - 12\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$$

Substitution: $\quad t = x+2 \;\rightarrow\; dt = dx$

$$= 3\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 12\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Substitution: $\quad u = t^2+1 \;\rightarrow\; du = 2t\,dt$

$$= 3\int \frac{1}{u}\,du - 12\arctan t$$

$$= 3\ln|u| - 12\arctan t + C$$

$$= 3\ln|t^2+1| - 12\arctan(x+2) + C$$

$$= 3\ln|x^2+4x+5| - 12\arctan(x+2) + C$$

Integration rationaler Funktionen

Schritte zur reellen Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die durch die Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ definierte gebrochen rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} .$$

a) **Polynomdivision**

Falls $\deg P \geq \deg Q$ führe eine Polynomdivision mit polynomialem Anteil $p(x)$ und Rest $r(x)$ durch:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} ,$$

wobei $\deg p = \deg P - \deg Q$ und $\deg r < \deg Q$.

b) **Faktorisierung von Q**

$$Q(x) = c(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_n)^{k_n} q_1^{\ell_1}(x) \cdots q_m^{\ell_m}(x)$$

Dabei sind $\quad q_j(x) = (x - a_j)^2 + b_j^2 \quad$ quadratische Polynome mit komplexen Nullstellen,

also in $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerlegbare Polynome.

c) **Partialbrüche**

(i) zu $(x-x_j)^{k_j}$:

$$\frac{\alpha_{j,1}}{x-x_j}\,,\ \frac{\alpha_{j,2}}{(x-x_j)^2}\,,\ldots,\ \frac{\alpha_{j,k_j}}{(x-x_j)^{k_j}}$$

(ii) zu $q_j^{\ell_j}(x)$:

$$\frac{\gamma_{j,1}x+\delta_{j,1}}{(x-a_j)^2+b_j^2}\,,\ \frac{\gamma_{j,2}x+\delta_{j,2}}{((x-a_j)^2+b_j^2)^2}\,,\ldots,\ \frac{\gamma_{j,\ell_j}x+\delta_{j,\ell_j}}{((x-a_j)^2+b_j^2)^{\ell_j}}$$

d) **Partialbruchzerlegungsansatz**

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{j,1}}{x-x_j}+\frac{\alpha_{j,2}}{(x-x_j)^2}+\cdots+\frac{\alpha_{j,k_j}}{(x-x_j)^{k_j}}\right)\\ &\quad+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\gamma_{j,1}x+\delta_{j,1}}{(x-a_j)^2+b_j^2}+\cdots+\frac{\gamma_{j,\ell_j}x+\delta_{j,\ell_j}}{((x-a_j)^2+b_j^2)^{\ell_j}}\right)\end{aligned}$$

e) **Berechnung der Unbekannten** $\alpha_{j,i}, \gamma_{j,i}, \delta_{j,i}$

(i) **Koeffizientenvergleich**

Multipliziere den Partialbruchzerlegungsansatz mit $Q(x)$

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}(\cdots) + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}(\cdots)$$

und vergleiche die Koeffizienten des Polynoms $r(x)$ mit denen des durch Kürzen, Ausmultiplizieren und Sortieren nach x-Potenzen entstandenen Polynoms der rechten Seite.

Die Unbekannten $\alpha_{j,i}, \gamma_{j,i}, \delta_{j,i}$ ergeben sich als Lösung des aus dem Koeffizientenvergleich resultierenden Gleichungssystem.

(ii) **Einsetzungsmethode**

Multipliziere den Partialbruchzerlegungsansatz mit $Q(x)$

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}(\cdots) + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}(\cdots)$$

und kürze auf der rechten Seite die Nennerfaktoren gegen die aus $Q(x)$.

Ohne die rechte Seite auszumultiplizieren werden jetzt die reellen Nullstellen x_j und ggf. die komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ von $Q(x)$ nacheinander jeweils auf beiden Seiten eingesetzt. Damit lassen sich die Unbekannten $\alpha_{j,k_j}, \gamma_{j,\ell_j}, \delta_{j,\ell_j}$ berechnen.

Durch (ggf. mehrfaches) Ableiten und Wiederholung des obigen Verfahrens ergeben sich die übrigen Unbekannten, falls die linearen oder quadratischen Faktoren von $Q(x)$ in höherer als erster Potenz auftreten.

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Das Integral ergibt sich durch Integration der aus der polynomialen und Partialbruchzerlegung resultierenden Summanden und anschließender Summation der Teilintegrale.

Dazu ist die Integration der folgenden Typen erforderlich:

a) **Polynome:** $\displaystyle p(x) = \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$

$$\int p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{s} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

b) **Partialbruchtyp:** $\displaystyle\frac{1}{(x-x_j)^k}$

(i) $k=1$: $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_j}\,dx = \ln|x-x_j| + C$

(ii) $k \geq 2$: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_j)^k}\,dx = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-x_j)^{k-1}} + C$

c) **Partialbruchtyp:**

$$\frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^\ell} = \frac{c}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell} + (ca+d)\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^\ell}$$

(i) $\ell = 1$: $\displaystyle\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \ln((x-a)^2+b^2) + C$

(ii) $\ell \geq 2$:

$$\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} + C$$

(iii) $\ell = 1$: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$

(iv) Rekursionsformel für $\ell \geq 2$:

$$I_\ell := \int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(1-\ell)b^2}\left((3-2\ell)\underbrace{\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\,dx}_{=I_{\ell-1}}\right.$$

$$\left. - \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right) + C$$

Beweis der Rekursionsformel:

$$
\begin{aligned}
I_{\ell-1} \;&:=\; \int \frac{(x-a)^2+b^2}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx \\
&= \int \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx \;+\; b^2 I_\ell
\end{aligned}
$$

partielle Integration:

$u = \dfrac{(x-a)}{2}$ und $v' = \dfrac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}$$

$$\int \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx$$

$$= \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-l)} I_{\ell-1}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\ell-1} = \frac{1}{2(1-l)}\cdot\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-l)} I_{\ell-1} \;+\; b^2 I_\ell$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad I_\ell \;&=\; \frac{1}{b^2}\left(I_{\ell-1}\left(1+\frac{1}{2(1-l)}\right) - \frac{1}{2(1-l)}\cdot\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2(1-l)b^2}\left((3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10:

Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{7}{3x^2 + 15x - 18}\, dx\ ,$

Nennerfaktorisierung:

$$3x^2 + 15x - 18 = 3(x^2 + 5x - 6) = 3(x-1)(x+6)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3x^2 + 15x - 18} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{x^2 + 5x - 6} \right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{(x-1)(x+6)} \right)$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{1}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6) + B(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

Multiplikation der Gleichung mit $\quad (x-1)(x+6)$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+6) + B(x-1)$$

Nennernullstellen einsetzen:

$x = 1 \quad \Rightarrow$

$$1 = A(1+6) + B(1-1) = 7A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{7}$$

$x = -6 \quad \Rightarrow$

$$1 = A(-6+6) + B(-6-1) = -7B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx \;=\; \frac{7}{3}\int \frac{1}{7}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{7}\frac{1}{x+6}\,dx$$

$$= \; \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| - \ln|x+6|\right) + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx$,

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3+x^2-35x+17) : (x^2+6x-7) = x-5+\dfrac{2x-18}{x^2+6x-7} \\ -\underline{(x^3+6x^2-7x)} \\ \qquad\qquad -5x^2-28x+17 \\ \qquad\quad -\underline{(-5x^2-30x+35)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2x-18 \end{array}$$

Nennerfaktorisierung: $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{2x-18}{x^2+6x-7}=\frac{2x-18}{(x-1)(x+7)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+7}$$

$\Rightarrow \quad 2x-18=A(x+7)+B(x-1)=(A+B)x+7A-B$

Berechnung von A und B über einen Koeffizientenvergleich von

$$2x - 18 = (A + B)x + 7A - B$$

$$-18 = 7A - B \quad \Rightarrow \quad B = 7A + 18$$

$$2 = A + B = A + 7A + 18 = 8A + 18$$

$$\Rightarrow \quad 8A = -16 \quad \Rightarrow \quad A = -2 \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

alternativ:

Berechnung von A und B durch Einsetzen von x-Werten, vorzugsweise der Nennernullstellen in die Gleichung:

$$2x - 18 = A(x + 7) + B(x - 1)$$

$$x = 1: \quad 2 - 18 = -16 = A(1 + 7) \quad \Rightarrow \quad A = -2$$

$$x = -7: \quad 2 \cdot (-7) - 18 = -32 = B(-7 - 1) \;\Rightarrow\; B = 4$$

Integration:

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 35x + 17}{x^2 + 6x - 7}\, dx$$

$$= \int x - 5 - \frac{2}{x - 1} + \frac{4}{x + 7}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x - 2\ln|x - 1| + 4\ln|x + 7| + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx\,.$

Dieses Integral wird über die Rekursionsformel mit $\ell = 2$ berechnet

$$\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{9}{3^2(2x^2/3+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}\,dx \qquad \text{Substitution} \qquad t = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \qquad \text{Rekursionsformel mit } \ell = 2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2(1-2)}\left((3-2\cdot 2)\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{t}{t^2+1}\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1}\right) + C \qquad \text{Rücksubstitution}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right) + C$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{6}} + \frac{x}{2x^2+3}\right) + C$$

Aufgabe 11:

Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\, dx\ .$$

Lösung:

Raten der Nennernullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 27) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad (x^4 - 4x^3 + 27) : (x-3) = x^3 - x^2 - 3x - 9 \\
-\underline{(x^4 - 3x^3)} \\
\qquad\quad -x^3 + 27 \\
\qquad -\underline{(-x^3 + 3x^2)} \\
\qquad\qquad\quad -3x^2 + 27 \\
\qquad\qquad -\underline{(-3x^2 + 9x)} \\
\qquad\qquad\quad -9x + 27 \\
\qquad\qquad -\underline{(-9x + 27)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Erneutes Raten der Nullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 9) und Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x - 3) = x^2 + 2x + 3 = ((x+1)^2 + 2) \\
-\underline{(x^3 - 3x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 3x - 9 \\
\qquad -\underline{(2x^2 - 6x)} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 9 \\
\qquad\qquad -\underline{(3x - 9)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Damit lautet die Nennerfaktorisierung:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x-3)^2(x^2 + 2x + 3) = (x-3)^2((x+1)^2 + 2)\,.$$

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx = \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{(x-3)^2((x+1)^2 + 2)}\,dx$$

<u>Partialbruchzerlegungsansatz:</u>

$$\frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx + D}{(x+1)^2 + 2}$$

$\Rightarrow 8x^3 - 43x^2 + 46x - 39$

$= A(x-3)((x+1)^2+2) + B((x+1)^2+2) + (Cx+D)(x-3)^2$

Koeffizienten über Einsetzen verschiedener x-Werte berechnen:

<u>Berechnung von B</u> durch Einsetzten der Nennernullstelle $x = 3$:

$$8 \cdot 3^3 - 43 \cdot 3^2 + 46 \cdot 3 - 39 = -72 = B(4^2+2) \quad \Rightarrow \quad B = -4$$

<u>Berechnung von A</u> durch Ableiten

$24x^2 - 86x + 46 =$

$A((x+1)^2+2) + B \cdot 2(x+1) + (x-3)[2A(x+1)$

$+C(x-3) + 2(Cx+D)]$

und dann Einsetzten der Nennernullstelle $x = 3$:

$$24 \cdot 3^2 - 86 \cdot 3 + 46 = 4 = A(4^2+2) - 4 \cdot 2(3+1) \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

<u>Berechnung von C und D</u> durch Einsetzen geeigneter x Werte:

$x = 0:$

$-39 = A(-3)(1^2+2) + B(1^2+2) + (C \cdot 0 + D)(-3)^2$

$= -30 + 9D \quad \Rightarrow \quad D = -1$

$x = 1:$

$8 - 43 + 46 - 39 = -28$

$= A(-2)((2)^2 + 2) + B((2)^2 + 2) + (C + D)(1 - 3)^2$

$= -52 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = 6$

Damit kann das Integral mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} + \frac{6x-1}{(x+1)^2+2}\, dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3}$$

$$+3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\, dx - 7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\, dx + \tilde{C}$$

Zur Lösung der verbleibenden Teilintegrale:

Substitution: $\quad t = (x+1)^2 + 2 \to dt = 2(x+1)dx$

$$3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2} dx = 3\int \frac{1}{t} dt = 3\ln|t| = 3\ln|(x+1)^2+2| + C_1.$$

Substitution

$$t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}dt$$

$$7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{2})^2+1}\,dx$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan t = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C_2.$$

Damit erhält man die Stammfunktion

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx$$

$$= \; 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\ln\left|(x+1)^2+2\right| - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

Das Riemann-Integral

Definition:

a) Die Punkte $x_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \dots n$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

bilden eine **Zerlegung** Z des Intervalls $[a, b]$
in die Teilintervalle $[x_i - x_{i-1}],\ i = 1, \dots n$
mit den jeweiligen Breiten $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$
und der **Feinheit** $|Z| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\Delta x_i|$.

b) Gegeben sei eine Zerlegung Z von $[a, b]$ und eine
beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,
$m_i := \inf f([x_{i-1}, x_i])$ und $M_i =: \sup f([x_{i-1}, x_i])$.
Man definiert dann die

(i) **Untersumme**:

$$U_f(Z) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

(ii) **Riemannsche Summe**:

$$R_f(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

(iii) **Obersumme**:

$$O_f(Z) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Bemerkung:

a) Für jede Zerlegung Z gilt $U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$.

b) Für zwei beliebige Zerlegungen Z und $\tilde{Z}$ gilt
$U_f(Z) \leq O_f(\tilde{Z})$.

Definition:

Falls $\sup\limits_Z U_f(Z) = \inf\limits_Z O_f(Z)$ gilt, heißt

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \sup_Z U_f(Z) = \inf_Z O_f(Z)$$

bestimmtes Riemann-Integral
von f über das Intervall $[a, b]$.

Integrierbarkeitskriterien

Satz:

Gegeben sei eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt:

a) Ist f stetig auf $[a, b]$, dann ist f über $[a, b]$ integrierbar.

b) Ist f monoton auf $[a, b]$, dann ist f über $[a, b]$ integrierbar.

c) **Riemannsches Kriterium**:
f ist über $[a, b]$ integrierbar genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung existiert für die gilt:

$$O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon \, .$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

a) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.

b) Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b \, .$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 4$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{-1, \frac{2-n}{n}, \frac{4-n}{n}, \frac{6-n}{n}, \cdots, 1\right\}$$

des Intervalls $I = [-1, 1]$ Unter- und Obersumme,
also $U_f(Z_n)$ und $O_f(Z_n)$, zu f.

Mit $x_i = \dfrac{2i-n}{n}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ erhält man

$$\begin{aligned}
U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(3\frac{2i-n}{n} + 4\right)\left(\frac{2(i+1)-n}{n} - \frac{2i-n}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n + 6i) = \frac{2}{n^2}\left(n^2 + 6\frac{(n-1)n}{2}\right) = 8 - \frac{6}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(3\frac{2(i+1)-n}{n} + 4\right)\left(\frac{2(i+1)-n}{n} - \frac{2i-n}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n+6i+6) \;=\; \frac{2}{n^2}\left(n^2 + 6\frac{(n-1)n}{2} + 6n\right) \\
&= 8 + \frac{6}{n}
\end{aligned}$$

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

f ist integrierbar, denn f ist stetig.
Der Wert des Integrals ergibt sich dann durch

$$\lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(8 + \frac{6}{n}\right) = 8 = \lim_{n\to\infty}\left(8 - \frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} U_f(Z_n).$$

c) Man berechne $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x + 4\,dx$ über den Hauptsatz.

$$\int_{-1}^{1} 3x + 4dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 8$$