Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2020

Inhalte der Vorlesung Analysis II.

1. Gleichmäßige Konvergenz.
2. Potenzreihen.
3. Elementare Funktionen.
4. Interpolation.
5. Integration.
6. Kurven und Kurvenintegrale.
7. Numerische Quadratur.
8. Extrapolation.
9. Periodische Funktionen, Fourier–Reihen.
10. Schnelle Fourier–Transformation (FFT).

6.1. Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

6.1. Gleichmäßige Konvergenz

Beispiel: Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : \quad 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & : \quad \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wichtiges Resultat zur gleichmäßigen Konvergenz.

Satz: Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D.

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, sodass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, sodass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \text{ mit } \|z - z_0\| < \delta. \end{aligned}$$

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und es gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \ \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

Folgerung: Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D,$$

auf D gleichmäßig konvergiert. Dann ist f stetig in D.

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left|\sum_{n=0}^{m} f_n(z) - f(z)\right| \leq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy–Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.

Satz: Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_:(a,b) \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{für } x \in (a,b),$$

auf (a,b) gleichmäßig konvergent sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a,b), und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

6.2. Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt (komplexe) Potenzreihe zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beispiel: Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\ln(z), \cos(z), \sin(z), \ldots$$

Beispiel: Taylor–Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty$, die Taylor–Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen.

- Die Taylor–Reihe einer $\mathcal{C}^\infty$–Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Konvergiert die Taylor–Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f reell analytisch.

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar gleichmäßig.

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Beweis: Wir definieren

$$r := \sup \left\{ |w| \quad | \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) konvergent.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, sodass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$|a_k w^k| \leq M \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Beweis: (Fortsetzung) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

und weiterhin

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1 \qquad \text{für alle } k \geq 1,$$

sodass die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$.

Die Formel von Cauchy–Hadamard.

Satz: Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der Formel von Cauchy–Hadamard berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$ (siehe 3.3 aus Analysis I)

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium

$$\forall\, k \geq k_0 \quad : \quad \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,|z-z_0| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Konvergenz von Potenzreihen.

Satz: Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \qquad \text{oder} \qquad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Beweis des letzten Satzes.

Beweis: Der erste Teil von a) folgt aus der Formel von Cauchy–Hadamard. Verwende für den zweiten Teil von a) das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-z_0|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Zu Teil b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy–Hadamard, womit

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k}\to 1$ für $k\to\infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch.

Beispiele.

- Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z=0$, denn $k!z^k$ ist für $z\neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r=0$.
- Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r=1$.
- Die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r=\infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1+2z+3z^2+4z^3+\ldots \quad \text{für } |z|<1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2+6z+12z^2+\ldots\right)$$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

liefert eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

Potenzreihenentwicklung von arctan.

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert die Potenzreihenentwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer Taylor–Reihe überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{für } |x-x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- Identitätssatz für Potenzreihen: Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt:

$$a_k = b_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Abelscher Grenzwertsatz: Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, d.h. insbesondere in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Beispiel zum Abelschen Grenzwertsatz.

Beispiel: Die Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt:

a)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2)$$

b)

$$\lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k \quad \text{für } |z| < r_1$$

c) Cauchy–Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) z^k \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2)$$

Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen etc.

d) Ist $f(0) = 0$, so läßt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen, d.h. es gibt ein $r_3 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{für } |z| < r_3$$

e) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein $r_4 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $d_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \quad \text{für } |z| < r_4,$$

die sich nach dem Cauchy–Produkt in c) wie folgt rekursiv berechnen.

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{l=0}^{k-1} d_l a_{k-l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 1. Wir definieren den cosinus hyperbolicus für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog erhält man für $x \in \mathbb{R}$ den sinus hyperbolicus durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 2. Für

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l\right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots\right) \\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x^3 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right)x^4 + \ldots \quad \text{für } -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 3. Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ verwenden wir den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und damit gilt

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

Fortsetzung von Beispiel 3.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^k$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} = \begin{cases} 1 & : \quad k = 0 \\ 0 & : \quad k > 0 \end{cases}$$

Damit bekommt man

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!} B_l \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Die Zahlen B_k nennt man Bernoullische Zahlen:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

6.3. Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} z^k,$$

hat Konvergenzradius $r = \infty$, und daher ist $\exp(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1$$

Anfangswertproblem für gewöhnliche Diferentialgleichung.

Suche zu $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0))$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Funktionalgleichung: Es gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

Folgerung:

Für die Exponentialfunktion gilt:

1) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
2) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
3) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
4) Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Für die Exponentialfunktion gilt weiterhin:

5)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

6) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

7) Für die Eulersche Zahl $e := \exp(1)$ gilt: Es gilt:

$$\begin{aligned} e &:= \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ e &= 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\,\ldots \end{aligned}$$

Die Eulersche Zahl ist e eine irrationale Zahl.

8) Es gilt $\exp(qx) = (\exp(x))^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Der natürliche Logarithmus.

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, besitzt

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

eine eindeutige Umkehrfunktion,

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Diese Umkehrfunktion nennt man den natürlichen Logarithmus.

Eigenschaften:

1) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

2) Es gilt: $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

3) Es gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Weitere Eigenschaften des Logarithmus.

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \quad \text{für alle } x > 0,\ q \in \mathbb{Q}.$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(e) = 1$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

7) Es gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Die allgemeine Potenzfunktion.

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a)$$

Wir definieren daher allgemeine Potenzen wie folgt.

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \quad \text{für } a > 0,\ z \in \mathbb{C}$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Weitere Eigenschaften der allgemeinen Potenz.

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den Logarithmus zur Basis a, wobei gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{für } x > 0$$

4) Es gelten die Differentiationsregeln

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a^x) &= \ln a \cdot a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ a > 0 \\
\frac{d}{dx}(x^a) &= a x^{a-1} \quad \text{für } a \in \mathbb{R},\ x > 0 \\
\frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x, a > 0.
\end{aligned}$$

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Satz: Es gilt

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \text{für } a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \quad \text{für } k \geq 0$$

Beweisidee: Rechte Seite löst die Differentialgleichung $(1+x)g'(x) = a \cdot g(x)$.

Spezialfälle. Für $-1 < x < 1$ gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \ldots \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \ldots
\end{aligned}$$

Hyperbolische Funktionen.

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \end{aligned}$$

mit den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \\ \sinh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \end{aligned}$$

die aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgen.

Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen.

1) Die Funktion cosh ist gerade und sinh ungerade, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2) Für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

3) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

4) Es gilt die algebraische Relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen.

Die Funktion sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, die Funktion cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit arcosh und arsinh.

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{für } 1 \leq x < \infty \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{für } 1 \leq x < \infty \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

Die Funktionen sin und cos besitzen jeweils Konvergenzradius $r = \infty$, sind somit auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

1) sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion, d.h. es gilt

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2) Weiterhin gilt: $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

3) Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y) \\ \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y) \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \end{aligned}$$

4) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \\ \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \end{aligned}$$

5) Für die reellen Ableitungen bekommt man

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Tangens– und Kotangensfunktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \qquad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (z \neq k\pi)$$

Eigenschaften:

1) tan und cot sind π–periodische, ungerade Funktionen.
2) Es gilt

$$\begin{aligned} \tan z &= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cot z &= i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Reihen–Entwicklung von Tangens und Kotangens.

Es gelten die Reihen–Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\tan z &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \quad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2} \\
\cot z &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \\
&= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \quad \text{für } 0 < |z| < \pi
\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}.

Reelle Ableitungen: Im jeweiligen Definitonsbereich gilt

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Kapitel 7. Interpolation

7.1. Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

Gesucht: Einfache Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten interpoliert, d.h.

$$p(x_i) = f_i \quad \text{für alle } i = 0, 1, \dots, n.$$

Zum Beispiel: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.

Fragen:

1. Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
2. Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?

Klassische Polynom–Interpolation.

Bestimme ein Polynom (höchstens) n–ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, d.h. $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz:

Die Interpolationsbedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n & = & f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n & = & f_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & = & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n & = & f_n \end{array}$$

Vandermonde–Matrix.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

kurz

$$V \cdot a = f$$

heißt Vandermonde–Matrix.

Satz:

Für die Determinante der Vandermonde–Matrix $V = V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ gilt

$$\det V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation.

Folgerung: Falls die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind, so ist die Vandermonde–Matrix V regulär.

Satz: Zu paarweise verschiedenen Stützstellen

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

Aber: Wir berechnen die Lösung auf Grund der Komplexität **nicht** über das lineare System $V \cdot a = f$.

Kapitel 7. Interpolation

7.2. Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Langrange–Darstellung.

Definieren Lagrange–Polynome

$$L_j(x) := \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \qquad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0 \leq i, j \leq n.$$

Lösung mit der Lagrange–Darstellung.

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom $p_n(x)$

$$p_n(x) := f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Lagrange–Darstellung.

Beispiel: Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Beispiel zur Lagrange–Darstellung.

Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann sieht die zugehörige Lagrange–Basis wie folgt aus.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \qquad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Das interpolierende kubische Polynom p_3 besitzt die Darstellungen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 4 \cdot L_2(x) + 18 \cdot L_3(x) \\ &= -4\,\frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18\,\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Interpolation in der Newton–Darstellung.

Betrachte die Newton–Basis

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) \qquad \text{für } 0 \le i \le n.$$

Dann gibt es *eindeutige* Newton–Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \omega_i(x) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Newton–Darstellung.

Beachte: Es gilt

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Berechnung der Newton–Koeffizienten.

Beachte: Aus den Interpolationsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \stackrel{!}{=} f_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \stackrel{!}{=} f_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\ \vdots &= \vdots \\ p_n(x_n) &= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \ldots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) \\ &\stackrel{!}{=} f_n \end{aligned}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{\omega_n(x_n)}\left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \omega_i(x_n)\right)$$

Folgerungen aus der Newton–Darstellung.

- Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j+1)$ Daten

$$(x_0, f_0), \ldots, (x_j, f_j)$$

Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j] \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n$$

- Nimmt man ein Datum (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1}\omega_{n+1}(x)$$

mit

$$c_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\omega_{n+1}(x_{n+1})}$$

Die Methode der dividierten Differenzen.

Satz: Die Koeffizienten

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j] \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n$$

des interpolierenden Newton–Polynoms

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\omega_i(x)$$

sind gegeben durch die dividierten Differenzen

$$\begin{aligned} f[x_j] &= f_j \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

Effiziente Berechnung der dividierten Differenzen.

Rekursives Berechnungsschema der dividierten Differenzen für $n = 3$.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1}{x_3 - x_1}\left(\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right)
\end{aligned}
$$

Der Interpolationsfehler.

Für das Interpolationspolynom gilt

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x) \\
&= f(x) - [p_{n+1}(x) - c_{n+1}\omega_{n+1}(x)] \\
&= f[x_0, \ldots, x_n, x]\,\omega_{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Folgerung: Für den Interpolationsfehler gilt die Abschätzung

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |\omega_{n+1}(x)|$$

Tschebyscheff–Knoten.

Beachte: Ein Term des Interpolationsfehlers ist das Knotenpolynom

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Optimierungsproblem: Bestimme die Knoten $x_0, x_1, \dots, x_n$, so dass

$$\max_{x_0,\dots,x_n \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right|$$

minimal auf $[a, b]$ ist.

Lösung: Für das Intervall $[-1, 1]$ sind die Tschebyscheff–Knoten optimal

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \qquad \text{für } j = 0, 1, \dots, n$$

Kapitel 7. Interpolation

7.3. Spline–Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Definition: Eine Funktion $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt kubischer Spline, falls

- $S \in \mathcal{C}^2([a, b])$, d.h. S ist zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$,
- S ist auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le n$ ein kubisches Polynom:

$$S(x)\,\big|_{[x_{j-1},x_j]} = s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

Ziel: Interpolation der Daten (x_j, f_j), $0 \le j \le n$ mit kubischen Spline S, so dass

$$S(x_j) = f_j \quad \text{für } 0 \le j \le n.$$

Interpolation mit kubischen Splines.

Beobachtung:

Ein kubischer Spline besitzt $4n$ Parameter, die wie folgt bestimmt werden.

- Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{und} \quad s_j(x_j) = f_j \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

- Stetigkeit der Ableitung:

$$s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j) \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1,$$

- Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s_j''(x_j) = s_{j+1}''(x_j) \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1.$$

Dies sind insgesamt $(4n-2)$ Gleichungen für $4n$ Parameter.

Resultat: Es fehlen noch zwei Bedingungen!

Zwei weitere Nebenbedingungen.

Definition: Ein kubischer Spline heißt

- natürlicher Spline, falls $S''(a) = S''(b) = 0$,
- periodischer Spline, falls $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$,
- allgemeiner Spline, falls $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$.

Beachte: Jede drei obigen Bedingungen liefert zwei weitere Gleichungen.

Satz: Unter allen interpolierenden $\mathcal{C}^2$–Funktionen minimiert der natürliche kubische Spline das Funktional

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 \, dx$$

Bemerkung: Das Funktional I mißt die Krümmung von y *approximativ*.

Berechnung des natürlichen kubischen Splines.

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

so gilt

$$\begin{aligned} a_j &= f_{j-1} \\ b_j &= \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6} h_j \\ c_j &= \frac{M_{j-1}}{2} \\ d_j &= \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j} \end{aligned}$$

wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ für $1 \leq j \leq n$.
Die Momente $M_j = S''(x_j)$ lösen ein lineares System mit *Tridiagonalmatrix*.

Herleitung des Splines mit Momentenmethode.

Der gewählte Ansatz

$$M_j := S''(x_j), \quad \text{für } 0 \leq j \leq n,$$

heißt Momentenmethode: $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) \qquad \text{mit } h_j = x_j - x_{j-1}$$

Zweifache Integration über Intervall $[x_{j-1}, x]$ liefert

$$\begin{aligned} s_j'(x) &= B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 \\ s_j(x) &= A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}(x - x_{j-1})^3 \end{aligned}$$

mit den Integrationskonstanten A_j, B_j.

Lösung der Bedingungsgleichungen.

Aus den Interpolationsbedingungen $s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}$ und $s_j(x_j) = f_j$ folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \quad \text{und} \quad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}) \tag{1}$$

mit der Stetigkeit von S' bei x_j, $1 \le j < n$, d.h. $s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j)$ weiterhin

$$B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2} h_j = B_{j+1} \qquad \text{für } 1 \le j \le n-1. \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt schließlich $n-1$ lineare Gleichungen

$$h_j M_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1}) M_j + h_{j+1} M_{j+1} = 6 \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

$1 \le j \le n-1$, für die $n-1$ *unbekannten* Momente $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Beachte: Die Momente $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ sind bereits *bekannt*.

Tridiagonalsystem für die Momente.

Das hergeleitete $(n-1) \times (n-1)$ lineare System hat die Form

$$\begin{pmatrix} 2k_1 & h_2 & & & \\ h_2 & 2k_2 & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2k_{n-2} & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$, $1 \le j \le n$, $k_j = h_j + h_{j+1}$, $1 \le j \le n-1$, und

$$d_j = 6 \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right) \qquad \text{für } 1 \le j \le n-1,$$

sowie den Randwerten $M_0 = M_n = 0$.

Abschließende Bemerkungen zu Splines.

- Der natürliche kubische Spline kann effizient berechnet werden, nämlich durch Lösen des Tridiagonalsystems in nur $O(n)$ Schritten.
- Ein interpolierender Spline vermeidet (unerwünschte) Oszillationen.
- Für $f \in \mathcal{C}^4$ gilt die asymptotische Fehlerabschätzung

$$|f(x) - S(x)| = O(h^4), \quad h \to 0$$

wobei $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$.

- Verwendet man einen vollständigen Spline mit Randbedingungen

$$S'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad S'(b) = f'(b)$$

so erhält man ein Tridiagonalsystem, das effizient gelöst werden kann.

- Verwendet man periodische Splines, so erhält man kein Tridiagonalsystem. Die Lösung kann dennoch effizient in $O(n)$ Schritten berechnet werden.

Kapitel 8. Integration

8.1. Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine Zerlegung (Partition, Unterteilung) des Intervalls $[a, b]$.

Die Feinheit der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.

Riemannsche Summen.

Definition: Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{für } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

nennt man eine Riemannsche Summe der Zerlegung Z,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Untersumme von $f(x)$ zur Zerlegung Z,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Obersumme von $f(x)$ zur Zerlegung Z.

Eigenschaften von Riemannschen Summen.

Beobachtung: Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für *feste* Zerlegungen gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist Z_1 eine *feinere* Zerlegung als Z_2, d.h. $Z_2 \subset Z_1$, dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Das Riemannsche Integral.

Beobachtung: Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,dx \quad := \quad \sup\{U_f(Z)\ :\ Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \text{(Unterintegral)}$$

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx \quad := \quad \inf\{O_f(Z)\ :\ Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \text{(Oberintegral)}$$

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heißt (Riemann–)integrierbar über $[a,b]$, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das (Riemann–)Integral von $f(x)$ über $[a,b]$.

Beispiele zum Riemann–Integral.

Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

Für $f(x) = x$, $0 \le x \le 1$, und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ gilt

$$U_f(Z_n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

und somit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Weitere Beispiele zum Riemann–Integral.

- Betrachte
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
Dann gilt für **jede** Zerlegung: $\quad U_f(Z) = 0, \quad O_f(Z) = 1.$
Somit ist die Funktion **nicht** integrierbar.
- Betrachte
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq c \\ 1 & : \quad x = c \end{cases}$$
für $a \leq c \leq b$. Dann ist die Funktion f integrierbar mit
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$
denn es gilt
$$U_f(Z) = 0 \qquad 0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\|$$

Eigenschaften des Riemann–Integrals.

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar über $[a,b]$. Dann gilt:

a) Für $a \leq c \leq b$ ist f über $[a,b]$ integrierbar, genau dann wenn f über $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar ist, und es gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

b) Linearität: Mit f und g ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ integrierbar:
$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

c) Positivität: Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

d) Monotonie: Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt:
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Standardabschätzungen zum Riemann–Integral.

Satz: Sei f integrierbar über $[a,b]$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(b-a)\cdot\inf(f[a,b]) \le \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; (b-a)\cdot\sup(f[a,b])$$

und weiterhin

$$\left|\quad\int_a^b f(x)\,dx\quad\right| \le (b-a)\cdot\sup\{|f(x)|\;:\;a\le x\le b\}$$

Falls $|f(x)|$ integrierbar ist, so gilt

$$\left|\quad\int_a^b f(x)\,dx\quad\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Beweis des letzten Satzes.

Für die Zerlegung $Z=\{a,b\}$ von $[a,b]$ folgt sofort

$$\begin{aligned}\inf(f[a,b])\cdot(b-a)=U_f(Z) &\le \int_a^b f(x)\,dx\\ &\le O_f(Z)=\sup(f[a,b])\cdot(b-a)\end{aligned}$$

Weiterhin folgt wegen $\pm f(x)\le|f(x)|$, für alle $x\in[a,b]$, die Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\le \int_a^b |f(x)|\,dx\\ &\le O_{|f|}(Z)=\sup\{|f(x)|\;:\;a\le x\le b\}\cdot(b-a)\end{aligned}$$

Bemerkung: Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a,b])\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx$$

liefert insbesondere die Positivtät des Integrals.

Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c.
Wir definieren daher
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
sowie
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
- Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt
$$R_f(Z_m) \to \int_a^b f(x)\,dx$$
für alle Zerlegungsfolgen $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a,b]$ mit $\|Z_m\| \to 0$ für $m \to \infty$.

Kapitel 8. Integration

8.2. Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent

a) $f(x)$ ist integrierbar über $[a,b]$.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit
$$0 \quad \le \quad O_f(Z) - \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx < \varepsilon/2,$$
$$0 \quad \le \quad \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx - U_f(Z) < \varepsilon/2,$$
a) $\to$ b): Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.
b) $\to$ a): Die Integrierbarkeit von f folgt direkt aus b) mit
$$0 \le \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \le O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Beschränkte monotone Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine beschränkte monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Für eine uniforme Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b-a), \quad 0 \le j \le n,$$

und für f monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes n. Nach dem Riemanschen Kriterium ist f integrierbar. Analog zeigt man die Integrierbarkeit für f monoton fallend.

Stetige Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar über $[a,b]$..

Beweis: f ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[a,b]$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit Feinheit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\le \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist f nach dem Riemannschem Kriterium integrierbar.

8.3. Der Hauptsatz und Anwendungen

Definition: Seien $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Dann heißt $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

Bemerkung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form
$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$
mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.
- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion
$$F_1(x) - F_2(x)$$
konstant.

Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) Die Funktion
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$
ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt
$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Beweisideen:

a) Zeige, dass gilt:
$$\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

b) Folgt direkt aus a) mittels
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C.$$

Beweis von a).

Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.
Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\
& \quad = \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \\
& \quad = \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \\
& \quad \leq \sup\{\, |f(t) - f(x)| \;:\; |t-x| \leq h \text{ und } t \in [a,b] \} \\
& \quad \to 0 \qquad (h \to 0),
\end{aligned}
$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[a,b]$.

Beweis von b).

Mit Teil a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

für eine Konstante C. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
F(b) &= \int_a^b f(t)\,dt + C \\
F(a) &= \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C = C
\end{aligned}
$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Bemerkungen.

- Teil a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen.
  An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad F'(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch das unbestimmte Integral von $f(x)$ und man schreibt

$$F = \int f(x)dx$$

  Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beispiele zur Integration.

Wir bezeichnen mit C stets die Integrationskonstante.

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C\\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele zur Integration.

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad \text{für } a \neq 0$$

$$\int b^x\,dx = \frac{1}{\ln b}b^x + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0$$

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C \qquad \text{für } x > 0$$

$$\int \log_b x\,dx = \frac{x}{\ln b}(\ln x - 1) + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

Wichtige Integrationsregeln.

Satz (Linearität): Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz (Partielle Integration): Sind $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Beweis: folgt direkt aus Produktregel der Differentiation.

Die Substitutionsregel.

Satz: Ist $h : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar und $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t))$$

Für bestimmte Integrale erhält man somit

$$\begin{aligned} \int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx \\ &= F(h(b)) - F(h(a)) \end{aligned}$$

Beweis: folgt direkt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t)$$

Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\, dx &= \int \sin x \cdot \sin x\, dx \\
&= \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x\, dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1-\sin^2 x)\, dx \\
\Rightarrow \quad 2\int \sin^2 x\, dx &= -\sin x \cos x + x + C \\
\Rightarrow \quad \int \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C
\end{aligned}
$$

Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a\cos t$ in

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\, dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}(-a\sin t)\, dt$$

denn

$$dx = -a\sin(t)dt, \quad h(0) = a, \quad h(\pi) = -a$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\, dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-a\sin t)\, dt \\
&= a\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt \\
&= a(t - \sin t \cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substitutiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = \int e^t\, 2t\, dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}}\, dx &= \int e^t\, 2t\, dt \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Nicht jedes Integral läßt sich explizit "lösen", d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt "einfache" Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad \text{(Integralsinus)}$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad \text{(Fehlerfunktion)}$$

$$\mathrm{E}(x,k) := \int_0^x (1 - k^2 \sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\, dt \qquad \text{(Elliptische Integrale)}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\,dx$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a, b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a, b]) \cdot p(x)$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a, b]) \cdot \int\limits_a^b p(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a, b]) \cdot \int\limits_a^b p(x)\,dx$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p(x) = 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

Der Satz von Taylor.

Man erhält die Taylor–Entwicklung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ um x_0 durch n–fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange–Restgliedformel aus dem Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

Kapitel 8. Integration

8.4. Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen $R(x)$ mit

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Methode: Partialbruch–Zerlegung von rationalen Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$\begin{aligned}
R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1}\left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}}\right] \\
&\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2}\left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \cdots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}}\right]
\end{aligned}$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg p \geq \deg q$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x)$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

Ansatz der Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] \\ & \quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{[(x - a_j)^2 + b_j^2]^1} + \cdots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{[(x - a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned} &\alpha_{jl}, \qquad j = 1, \ldots, n_1, \; l = 1, \ldots, k_j \\ &\gamma_{jl}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2, \; l = 1, \ldots, k_j \\ &\delta_{jl}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2, \; l = 1, \ldots, k_j \end{aligned}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel.

Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

- Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

- Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

- **Typ I: Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

- **Typ II: Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & \text{für } l = 1 \\ \dfrac{1}{1-l} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & \text{für } l = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

- **Typ III: Inverse Quadrate:**

$$I_l := \int \frac{1}{(x^2+1)^l}\,dx \quad \text{für } l \in \mathbb{N}$$

  - Für $l = 1$ gilt
$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$
  - Für $l > 1$ kann man I_l wie folgt *rekursiv* berechnen.
$$I_l = \frac{1}{2(1-l)}\left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{l-1}}\right] \quad \text{für } l = 2, 3, \ldots$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x^2+1)^l}\,dx &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{u^{l-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{l-1}} + C \end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_{l-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{l-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^l}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^l}\,dx + I_l \\ &= \frac{x}{2(1-l)(x^2+1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)}\cdot I_{l-1} + I_l \end{aligned}$$

Somit:

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)}\left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{l-1}}\right] \quad \text{für } l = 2, 3, \ldots$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx = \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx + (d+c\cdot a)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l}$$

- Erstes Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx &= \int \frac{du}{u^l}\\ &= \begin{cases} \ln|(x-a)^2+b^2|+C & \text{für } l=1\\ \dfrac{1}{1-l}\cdot\dfrac{1}{[((x-a)^2+b^2)^l]}+C & \text{für } l=2,3,\ldots\end{cases}\end{aligned}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^l} \qquad \text{mit } t=\frac{x-a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}\\ &= -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned}\int R(x)\,dx &= -\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &= -\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C\end{aligned}$$

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in
$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$
- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
und somit durch Substitution in
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Kapitel 8. Integration

8.5. Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne uneigentliche Integrale, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen
$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \int_\infty^\infty f(x)\,dx$$
- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{wobei } f:(a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig oder } f:[a,b) \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, falls sie über jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subset D$ integrierbar ist.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $[a, \infty)$ bzw. $(-\infty, b]$ bzw. $(-\infty, \infty)$, so definiert man

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\,dx &:= \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^b f(x)\,dx &:= \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &:= \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Bemerkung: Der Cauchysche Hauptwert ist definiert als

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x f(x)\,dx$$

und im Allgemeinen nicht identisch mit obigem Integral!

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b), so definiert man

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &:= \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(x)\,dx \\
\int_a^b f(x)\,dx &:= \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)\,dx \\
\int_a^b f(x)\,dx &:= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\[2ex] \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\,dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\,dx = -\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_0^y xe^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{y^2} e^{-u}\,du \quad \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-y^2}\right) \to \frac{1}{2} \quad \text{für } y \to \infty \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\,dx = 1$$

Konvergenzkriterien.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt

a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; : \; \exists\, C > a \; : \; \forall z_1, z_2 > C \; : \; \left| \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

b) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent, d.h.

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int\limits_a^\infty f(x)\, dx.$$

Majorantenkriterium.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt

c)

$$\forall x \; : \; |f(x)| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x)\, dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\, dx \quad \text{absolut konvergent}$$

d) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x \; : \; 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x)\, dx \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\, dx \quad \text{divergent}$$

Beispiel: Das Dirichlet–Integral.

Betrachte das Dirichlet–Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Das Dirichlet–Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

und somit

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{y_1} \to 0 \quad \text{für } y_1 \to \infty.$$

Das Dirichlet–Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$, ist aber nicht absolut konvergent.

Beispiel: Das Exponentialintegral.

Betrachte das Exponentialintegral

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \qquad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \le C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| = \frac{|te^t|}{t^2} \le \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt$$

folgt die absolute Konvergenz des Exponentialintegrals $\mathrm{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium.

Beispiel: Die Gamma–Funktion.

Die Gamma–Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$|e^{-t} t^{x-1}| \le t^{x-1} \qquad \text{für } 0 < t \le 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x}(1-\varepsilon^x) \to \frac{1}{x} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0+\,.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral.

Beispiel: Die Gamma–Funktion.

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$|e^{-t} t^{x-1}| = \left| \frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2} \right| \le \frac{C}{t^2} \qquad \text{für } 1 \le t \le \infty.$$

Mit dem Majorantenkrierum folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Bemerkung: Die Gamma–Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{für } x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

8.6. Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma–Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.
Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

Fragen:

1) Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
2) Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x,y)$ nach x differenzierbar ist?

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I.

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x,y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a,b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon \quad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a,b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x,y) - f(x_0,y))dy \right| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x_0,y)|dy < \varepsilon(b-a)$$

Somit ist F stetig in x_0. Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig.

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$ und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall I stetig differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt nach dem Mittwelwertsatz

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy \quad \text{für ein } \xi \in [x_0,x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \lim_{\xi\to x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,dy$$

Somit ist F in x_0 differenzierbar.
Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar.

Zwei Beispiele.

Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt$$

Beispiel 2: Die Bessel–Funktion

$$\begin{aligned} J_n(x) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z} \\ J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cdot \sin(x\sin t - nt)\,dt \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \cdot \cos(x\sin t - nt)\,dt \end{aligned}$$

Die Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma–Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Definition: Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I$$

heißt gleichmäßig konvergent, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt mit

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in I \text{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das Majorantenkriterium, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x,y)$ gibt mit

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty \qquad \text{für alle } x, y \in I.$$

Beweis:

$$\left| \int_a^\infty f(x,y)\,dy \right| \leq \int_a^\infty |f(x,y)|\,dy \leq \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty$$

Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: Sei $f(x, y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale

$$F(x) := \int_a^\infty f(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I gleichmäßg konvergent. Dann ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen.

Beispiel: Die Ableitung der Gamma–Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \ln t\, dt$$

Kapitel 9. Anwendungen der Integralrechnung

9.1. Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x–Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi (f(x))^2 \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden Rotationskörper die Volumenformel

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein.

Beispiel.

Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit } a, b > 0$$

um die x–Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) dx = \frac{4}{3}\pi a b^2 \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$.

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{rot} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{rot} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2$$

9.2. Kurven und Bogenlänge

Definition: Sei $c = (c_1, \ldots, c_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

- Dann wird c als Kurve im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet; $c(a)$ heißt Anfangspunkt, $c(b)$ heißt Endpunkt von c. c heißt geschlossene Kurve, falls $c(a) = c(b)$.
- Falls $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion ist, d.h. jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ ist stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve.
- $c(t)$ heißt stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, falls es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

gibt, so dass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion ist.
- Die Kurve c heißt glatt, falls

$$\frac{d}{dt}c(t) := \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0 \qquad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Beispiele.

- Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen Kreis im $\mathbb{R}^2$.
- Die Kurve

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T$$

beschreibt eine Zykloide.
Wegen

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)^T$$

ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.
- Die Kurve

$$c(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T \qquad t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine Schraubenlinie (Helix) mit Radius r und Ganghöhe h.

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \quad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c.

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine Umparametrisierung (Parameterwechsel). Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer $\mathcal{C}^1$–Kurve werden nur $\mathcal{C}^1$–Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ läßt sich als eine Kurve auffassen:

  $$c(x) := (x, f(x))^T \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

  bzw. $c(t) := (a + t(b-a), f(a + t(b-a)))^T$ für $0 \leq t \leq 1$.

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine untere Schranke für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c rektifizierbar, und in diesem Fall ist

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)$$

die Länge der Kurve c.

Berechnung der Bogenlänge einer $\mathcal{C}^1$–Kurve.

Satz: Jede $\mathcal{C}^1$–Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisskizze: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c_k'(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k'(\tau_{k_j}))^2 (t_{j+1} - t_j)} \right)$$

Beispiel.

Berechne die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= (r(1 - \cos t), r \sin t)^T \\
\|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2} \\
L(c) &= 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 8r
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer $\mathcal{C}^1$–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| \, d\tau = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau) \, d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt = L(c)$$

Die Bogenlängenfunktion einer $\mathcal{C}^1$–Kurve.

Definition: Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve.

- Die Funktion
$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$
heißt die Bogenlängenfunktion von c.

- Ist c glatt, so ist $S : [a, b] \to [0, L(c)]$ ein $\mathcal{C}^1$–Parameterwechsel.

- Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein $\mathcal{C}^1$–Parameterwechsel.

- Die entsprechende Parametrisierung
$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c)$$
von c nennt man die Parametrisierung nach der Bogenlänge.

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch
$$\tilde{c}\,'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$
Daher ist $\tilde{c}\,'(s)$ ist ein Einheitsvektor, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.
Weiterhin ist $\tilde{c}\,'(s)$ der Einheitstangentenvektor von c.

- Aus $\langle \tilde{c}\,'(s), \tilde{c}\,'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation
$$\langle \tilde{c}\,''(s), \tilde{c}\,'(s) \rangle = 0$$
d.h. der Beschleunigungsvektor $\tilde{c}\,''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}\,'(s)$.

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: Sei $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ die Bogenlängenparametrisierung der Kurve c.

- Dann bezeichnet man den Vektor

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den Hauptnormalenvektor von c.

- Die Funktion

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\|, \quad 0 \le s \le L(c)$$

nennt man die Krümmung der Kurve c.

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(s) &= (\cos s, \sin s), \quad 0 \le s \le 2\pi \\ n(s) &= \tilde{c}''(s) = -(\cos s, \sin s) \\ \kappa(s) &= 1 \end{aligned}$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte den Graph von $y = y(x)$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$, d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$:

$$\begin{aligned} c'(x) &= (1, y'(x))^T & ds &= \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx & \kappa(x) &= \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3} \end{aligned}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} c'(x) &= (1, y'(x), z'(x))^T \\ ds &= \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx \qquad (\text{Bogenlängenelement}) \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx \\ \kappa(x) &= \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{(\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2})^3} \end{aligned}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Für die Polarkoordinaten $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ im $\mathbb{R}^2$ gilt für $a \le t \le b$:

$$c(t) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T, \qquad L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt$$

Für die Kugelkoordinaten $r = r(t), \varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t)$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} c(t) &= (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)^T \quad \text{für } a \le t \le b \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\psi + r^2\dot{\psi}^2}\, dt \end{aligned}$$

Beispiel: Betrachte die Kardiode (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1+\cos\varphi) \quad \text{für } a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardiode gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 8a$$

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: Für die von einer $\mathcal{C}^1$–Kurve $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z = \mathbf{Z}[a,b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i) \qquad \text{für } 0 \le i \le m-1.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i}{t_{i+1}-t_i}\Delta t_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(x_i\frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} - \frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}y_i\right)\Delta t_i \\ &\to \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt \end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die **Archimedische Spirale** in Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$x = a\varphi \cos\varphi, \quad y = a\varphi \sin\varphi \quad \text{für } a > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\, d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit $x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$ gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\, d\phi \approx 1.292a^2$$

Kapitel 9. Anwendungen der Integralrechnung

9.3. Kurvenintegrale

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine stetige Funktion und $c : [a, b] \to D$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve. Dann wird des Kurvenintegral (oder Linienintegral) von $f(x)$ längs c definiert durch

$$\int_c f(x)\, ds := \int_a^b f(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\, ds$$

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}
\int_{c \circ h} f(x)\, ds &= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| d\tau \\
&= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau)))\, \|\dot{c}(h(\tau))\|\, h'(\tau)\, d\tau \\
&= \int_a^b f(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, d\tau \\
&= \int_c f(x)\, ds
\end{aligned}$$

Beispiel.

Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine $\mathcal{C}^1$–Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ.

- Für die Gesamtmasse des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x)\, ds = \int_a^b \rho(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

- Der Schwerpunkt des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x\, ds}{\int_c \rho(x)\, ds}$$

- Das Trägheitsmoment des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x)\, ds$$

  wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist.

Kapitel 10. Fourier–Analysis

10.1. Grundlegende Begriffe

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt periodisch mit der Periode T (oder T–periodisch), falls

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ziel: Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine Fourier–Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bemerkungen.

- Ist T eine Periode von f, so ist auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
- Sind T_1 und T_2 Perioden, so sind auch

  $$k_1 T_1 + k_2 T_2 \qquad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

  Perioden von f.
- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f, so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind $f(t)$ und $g(t)$ T–periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T–periodisch.
- Ist $f(t)$ T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

  $$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

  für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Periodische Fortsetzungen.

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt fortsetzen.

- Direkte Fortsetzung.

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

- Gerade Fortsetzung. Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben. Dann setze

$$f(t) := g(t - kT), \quad \text{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right) T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right) T$$

  wobei g zunächst an der y–Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

- Ungerade Fortsetzung. Wie oben, aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

Fourier–Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \ a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

  heißt Fourier–Reihe (oder trigonometrische Reihe). Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \ a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

  der Fourier–Reihe heißen trigonometrische Polynome vom Grad n.

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe.

- Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt: $a_0 = 2\gamma_0, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$

- Für die Darstellung der Fourier–Reihe bekommt man

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier–Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen.

Satz: Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt$$

Beweis: Einerseits gilt

$$\langle e^{-ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1,$$

andererseits haben wir

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{il\omega t} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(l-k)\omega t}\, dt = \frac{1}{i(l-k)\omega} e^{i(l-k)\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq l$.

Berechnung der Fourier–Koeffizienten.

Satz: Konvergiert die Fourier–Reihe

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f(t)$, so ist f stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Da f_n stetig und gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig. Weiterhin:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-il\omega t}\, dt &= \int_0^T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} e^{-il\omega t}\, dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-il\omega t}\, dt = \gamma_l \cdot T. \end{aligned}$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \; k \neq l \\ T/2 & : \; k = l \neq 0 \\ T & : \; k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \; k \neq l \\ T/2 & : \; k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

10.2. Fourier–Reihen

Definition:

- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig bzw. stückweise stetig differenzierbar, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen auf $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.

- Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ werden die Fourier–Koeffizienten von $f(t)$ definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

10.2. Fourier–Reihen

Bemerkung: Mit den (komplexen) Fourier–Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier–Koeffizienten

$$a_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad \text{für } k > 0$$

Definition: Die mit den Fourier–Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die Fourier–Reihe von $f(t)$.

Bemerkung: Bei der obigen Definition verwendet man die direkte Fortsetzung der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer T–periodischen Funktion. Notation:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier–Reihen von geraden und ungeraden Funktionen.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T–periodische Funktion. Dann gilt:

$$f(t) \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

Beweis: Beispielsweise gilt für f gerade

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(t)\sin(k\omega t)\,dt \\ &= -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = -b_k \end{aligned}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{ für } t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{ für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - t}{2}\sin(kt)\,dt = \frac{1}{k}$$

und man bekommt für die Fourier–Reihe

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die Rechteckschwingung

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \text{ für } t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : \text{ für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \text{ für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & : k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier–Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots\right)$$

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π–periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \cos(kt)\,dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3} & : \quad k = 0 \\ (-1)^k \dfrac{4}{k^2} & : \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

Damit bekommt man die Fourier–Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos t}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} - + \ldots$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen.

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \qquad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Linearität:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

- Konjugation:

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

- Zeitumkehr:

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier–Reihen.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Streckung:

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \quad \text{für } c > 0$$

- Verschiebung:

$$f(t+a) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier–Reihen.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Ableitung: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$f'(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k) e^{ik\omega t} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega k \Big(b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t) \Big)$$

- Integration: Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)dt = 0$, so folgt

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \sim -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right)$$

Konvergenzsatz.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \Big) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- Die Fourier–Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

- In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung: Die Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier–Reihe nicht aus.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Es gilt:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{ für } t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{ für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \cdots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Weiterhin gilt:

$$1 + 2\cos t + \cdots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}\, dt = (t - \pi) + 2\sin t + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \cdots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Daraus folgt:

$$R_n(t) = \int_\pi^t \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{2\sin(t/2)}\,dt$$

$$\stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1}\int_\pi^t \cos\left((n+\frac{1}{2})\tau\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right)d\tau$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\bar{t}\right]}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1\right)$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

Approximationsgüte im quadratischen Mittel.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier–Reihen von f. Für den linearen Raum

$$T_n := \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t)\right\}$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \overline{u(t)}v(t)\,dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \qquad \text{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h. $S_n(t)$ ist die Bestapproximation an f aus T_n bezüglich $\|\cdot\|$.

Besselsche Ungleichung und Riemannsches Lemma.

Satz: Es gilt die Besselsche Ungleichung $\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

Folgerung: Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

und damit gilt das Riemannsche Lemma

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} |b_k| = 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz: Ist eine T–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) stückweise $(m+1)$–fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(m-1)}$$

stetig auf $\mathbb{R}$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{k^{m+1}} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fazit: Je glatter f, desto schneller konvergiert die Fourier–Reihe gegen f.

Beispiel: Bei der Rechteckschwingung $R(t)$ gilt

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null.

Die Parsevalsche Gleichung.

Bemerkung: Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die Parsevalsche Gleichung $\lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

denn die Fourier–Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$$

Beispiel: Für die Rechteckschwingung $R(t)$ gilt $\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = 2$. Da $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$$

Eindeutigkeitssatz.

Satz: Seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei T–periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \qquad \text{für alle } t \in [0,T], \\ f(t) &= \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \qquad \text{für alle } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Weiterhin besitzen f und g dieselben Fourier–Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt &= \int_0^T g(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \\ \int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt &= \int_0^T g(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ überein, d.h. es gilt $f \equiv g$.

Ausgangssituation: Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

mit einem *numerischen* Algorithmus.

Verwenden Numerische Quadratur (Quadraturformel) der Form

$$I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit

- Knoten: $x_i \in [a,b]$ für $i = 0, 1, \ldots, n$,
- Gewichten: g_i für $i = 0, 1, \ldots, n$.

11.1. Newton–Cotes Formeln

Grundidee: Verwende Interpolationspolynom p_n zu den Daten

$$(x_i, f(x_i)) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

und integriere die Interpolante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad \text{mit } L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ergebnis: Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$$

Konstruktion der Newton–Cotes Formeln.

Vereinfachung: Verwenden äquidistante Knoten

$$x_i = a + ih, \quad 0 \le i \le n, \quad \text{wobei } h = (b-a)/n$$

Ergebnis: Newton–Cotes–Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_{in} f(x_i)$$

mit Gewichten

$$\alpha_{in} = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x-j}{i-j}\,dx \qquad \text{für } 0 \le i \le n.$$

Die Trapezregel.

Wähle $n = 1$, $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)$$

und somit bekommt man die beiden Gewichte

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2} \\ \alpha_{11} &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Trapezregel:

$$I[f] \approx I_1[f] = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Die Simpsonregel.

Wähle $n = 2$ und somit

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$$

Damit bekommt man die drei Gewichte

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{1}{4}\int_0^2 (x-1)(x-2)\,dx = \frac{1}{6} \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{2}\int_0^2 x(2-x)\,dx = \frac{2}{3} \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{4}\int_0^2 x(x-1)\,dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Simpsonregel

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

Zwei weitere Newton–Cotes–Formeln.

- 3/8–Regel.

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{(b-a)}{3}\right) + f(b)\right)$$

- Milne–Regel.

$$\begin{aligned}
I_4[f] &= \frac{b-a}{90}\left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + 2\frac{b-a}{4}\right)\right. \\
&\qquad \left. + 32f\left(a + 3\frac{(b-a)}{4}\right) + 7f(b)\right)
\end{aligned}$$

Quadraturfehler der Newton–Cotes Formeln.

$R_n[f] := I_n[f] - I[f]$ heißt Quadraturfehler der Quadraturformel $I_n[f]$.

Erinnerung: Darstellung für den Interpolationsfehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Beispiel: Für den Quadraturfehler der Trapezregel ($n = 1$) gilt

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \int_a^b (p_1(x) - f(x))\, dx = -\int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\, dx \\ &= -\frac{f^{(2)}(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = \frac{1}{12} f^{(2)}(\tilde{\xi})(b-a)^3 \end{aligned}$$

Zusammengesetzte Newton–Cotes Formeln.

Ziel: Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Verwende auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ Quadraturformel der Ordnung n.

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}\Big(f(x_i) + f(x_{i+1})\Big) \\ &= h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right) \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung der zusammengesetzten Trapezregel.

Satz: Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^{(j)}[f] \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(t_{j+1}-t_j)^3}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\
&\leq \frac{N}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty = \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty
\end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Simpson–Regel.

Wende die Simpson–Regel auf die Teilintervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ an, mit Knoten

$$t_{2i}, \quad t_{2i+1}, \quad t_{2i+2} \qquad \text{für } 0 \leq i \leq N/2-1$$

wobei N gerade.
Dann bekommt man die zusammengesetzte Simpson–Regel

$$\begin{aligned}
S(h) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} (f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})) \\
&= \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 4f(b-h) + f(b))
\end{aligned}$$

Satz: Für die zusammengesetzte Simpson–Regel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(h) \right| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$$

11.2. Gauß–Quadratur

Erinnerung: Mit der Newton–Cotes Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

werden Polynome vom Grad n exakt integriert, denn es gilt für den Interpolationsfehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Dabei sind die Knoten x_i, $0 \leq i \leq n$, äquidistant auf $[a, b]$ verteilt.

Grundidee der Gauß–Quadratur: Variiere die Knoten $x_0, \ldots, x_n$.

Grundidee der Gauß–Quadratur.

Ziel:
Variiere Knoten, um Polynome möglichst hohen Grades exakt zu intergrieren.

Genauer:
Approximiere für eine feste positive Gewichtsfunktion $w : (a, b) \to (0, \infty)$ Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

durch Quadratur der Form

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)w(x_i)$$

mit einer speziellen Wahl von Stützstellen x_i und positiven Gewichten w_i.

Ergebnis: Gaußsche Quadraturformeln mit $(n + 1)$ Knoten integrieren Polynome vom Grad $2n + 1$ exakt.

Beispiel: Gauß–Tschebyscheff–Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
- **Knoten:** Nullstellen

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

des $(n+1)$–ten Tschebyscheff–Polynoms

$$T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos(x)) \in \mathcal{P}_{n+1} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

- **Konstante Gewichte:** $w_i = \pi/(n+1)$.
- Gauß–Tschebyscheff–Quadratur:

$$I_n[f] = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \approx I_w[f] = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,dx$$

Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome.

Satz: Die Tschebyscheff–Polynome $T_0, \ldots, T_n$ bilden eine orthogonale Basis des Polynomraums $\mathcal{P}_n$ bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(f, g)_w := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx$$

Genauer gilt

$$(T_k, T_j)_w = \begin{cases} \pi & \text{für } k = j = 0 \\ \pi/2 & \text{für } k = j > 0 \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases}$$

Beweis: Übung (mit Substitution $t = \cos x$)

Satz: Für die Tschebyscheff–Polynome gilt die Rekursionsforml

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k+1}(x) \qquad \text{für } k \geq 1,$$

wobei $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$.

Legrende–Polynome.

Satz: Für die Gewichtsfunktion $w = 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind die Legendre–Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \in \mathcal{P}_n$$

Orthogonalpolynome. Genauer gilt:

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} 2/(2n+1) & \text{für } n = m \geq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

Beweis: Übung (per Induktion).

Satz: Für die Legendre–Polynome gilt die Rekursionsformel

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, L_n(x) - \frac{n}{n+1}\, L_{n-1}(x) \qquad \text{für } n \geq 1,$$

wobei $L_0(x) = 1$ und $L_1(x) = x$.

Die ersten Legendre–Polynome $L_n(x)$, $n \geq 2$.

Die ersten Legendre–Polynome sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ L_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\ L_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \end{aligned}$$

Deren jeweilige Nullstellen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_2 &: \quad x_{0/1} = \pm\sqrt{3} \\ L_3 &: \quad x_0 = 0,\ x_{1/2} = \pm\sqrt{3/5} \\ L_4 &: \quad x_{0/1/2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{\frac{24}{5}}} \end{aligned}$$

Zur Konstruktion der Gauß–Legendre–Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1$.
- **Knoten:** $n + 1$ Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ des Legendre–Polynoms $L_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$.
- **Gewichte:** Mit festen Knoten $x_0, \ldots, x_n$ zu berechnen aus

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx > 0$$

- Gauß–Legendre–Quadratur:

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \approx I[f] = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx$$

Weitere Spezialfälle der Gauß–Quadratur.

Name	Intervall	Gewicht
Gauß–Legendre	$[-1, 1]$	$w(x) = 1$
Gauß–Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$
Gauß–Jacobi	$[-1, 1]$	$w(x) = (1 - x)(1 + x)$
Gauß–Laguerre	$[0, \infty]$	$w(x) = e^{-x}$
Gauß–Hermite	$[-\infty, \infty]$	$w(x) = e^{-x^2}$

Zur Konstruktion der Gauß–Quadraturformeln.

- Konstruiere zu festem Intervall $[a, b]$ und Gewichtsfunktion w eine Folge

$$p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$$

von Orthogonalpolynomen, wobei $p_k \in \mathcal{P}_k$ und $(p_k, p_j)_w = \delta_{kj}$.

- Verwende Nullstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ von p_{n+1} als Knoten.
- Berechne (positive) Gewichte

$$w_i = \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- **Ergebnis:** Gauß–Quadraturformel

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \approx I_w[f] = \int_a^b f(x) w(x)\, dx$$

mit $I_n[f] = I_n[p]$ für alle $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$.

Kapitel 11. Numerische Quadratur

11.3. Numerische Berechnung der Fourier–Koeffizienten

Berechne die Fourier–Koeffizienten einer 2π–periodischen Funktion $f(t)$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\, dt \end{aligned}$$

mittels einer numerischen Quadraturformel.

Zusammengesetzte Trapezregel (Trapezsumme): Setze

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{2\pi}{n} j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n \\ h &= \frac{2\pi}{n} \quad \text{(Schrittweite)} \\ f_j &= f(t_j) \quad \text{für } 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

11.3. Numerische Berechnung der Fourier–Koeffizienten

Aufgrund der Periodizität von $f(t)$ gilt $f_n = f_0$ und die Trapezsumme liefert dann

$$\begin{aligned} a_k &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \left\{ \frac{f_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \cos(kt_j) + \frac{f_n}{2} \right\} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cos(kjh) =: A_k \end{aligned}$$

und analog

$$b_k \approx \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \sin(kjh) =: B_k$$

Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$S_m(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))$$

Ende der Vorlesung.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Klausur zur Analysis II und hoffe, dass Ihnen die Vorlesung Spaß gemacht hat!