Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**

Prof. Dr. J. Struckmeier,

Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Umfrage: Bitte helfen Sie uns Mathe III in Ihrem Sinne zu planen und nehmen Sie sich 2 Minuten Zeit für eine Umfrage:

`https://www.limesurvey.uni-hamburg.de/index.php/533487?lang=de`

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\mathbf{c} : [0, \sqrt{15}] \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{c} : t \longmapsto \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^5}{5}\right)^T .$$

b) Gegeben seien die Kurve (Schraubenlinie)

$$\mathbf{c} : [0; 4\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{c} : t \longmapsto (3\cos(t)\,, 3\sin(t)\,, 4t\,)^T \,,$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\qquad f(x,y,z) = x^2\,y^2\,z \,+\, 1.$

Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs $\mathbf{c}$.

Hinweise: Nutzen Sie erst $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$ und dann $1-2\sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$.

Lösung:

a)

$$\dot{\mathbf{c}}(t) \;=\; (t^3, t^4)^T$$

$$\|\dot{\mathbf{c}}\| \;=\; \sqrt{t^6+t^8} \;=\; t^3\sqrt{1+t^2} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Substitution: $u = 1+t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt,\ t^2 = u-1$ **[1 Punkt]**

$$\int_0^{4\pi} t^3\sqrt{1+t^2}dt = \int_{u(0)}^{u(\sqrt{15})} (u-1)\sqrt{u}\,\frac{1}{2}\;du = \int_1^{16}\left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}\;du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{16} = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^{16}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{16}^5}{5} - \frac{\sqrt{16}^3}{3}\right] - \left[\frac{\sqrt{1}^5}{5} - \frac{\sqrt{1}^3}{3}\right] = \frac{4^5}{5} - \frac{4^3}{3} - \frac{3-5}{5\cdot 3}$$

$$= \frac{4^3(3\cdot 16-5)+2}{15} = \frac{64\cdot 43+2}{15} = \frac{2754}{15}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{c}}(t) &= (-3\sin(t)\,, 3\cos(t)\,, 4\,)^T\,,\\
\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| &= \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2 + 4^2} == \sqrt{9(\sin^2(t)) + \cos^2(t)) + 4^2} = \sqrt{25} = 5,\\
f(\mathbf{c}(t)) &= 9\sin^2(t)\cdot 9\cos^2(t)\cdot 4t + 1\\
&= 81\cdot t\cdot(4\sin^2(t)\cos^2(t)) + 1 = 81\cdot t\cdot \sin^2(2t) + 1\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{4\pi} f(\mathbf{c}(t))\cdot\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt &= \int_0^{4\pi} (81t\sin^2(2t)) + 1)\cdot 5dt\\
&= 4\pi\cdot 5 + 405\int_0^{4\pi} t\cdot\left(\frac{1-\cos(4t)}{2}\right)dt\\
&= 20\pi + \frac{405}{4}\left[t^2\right]_0^{4\pi} - \frac{405}{2}\int_0^{4\pi} t\cdot\cos(4t)dt\\
&= 20\pi + \frac{405}{4}(16\pi^2) - \frac{405}{2}\left[t\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{4\pi} + \frac{405}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\sin(4t)}{4}dt\\
&= 20\pi + 1620\pi^2 - 0 + \frac{405}{8}\left[\frac{-\cos(4t)}{4}\right]_0^{4\pi}\\
&= 20\pi + 1620\pi^2\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Durch $\mathbf{c} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) := (3 + 2\cos(t), 1 + 2\sin(t))^T$ sei ein Stück Draht der Dichte $\rho(x, y) := |x - 3|$ (Masse pro Längeneinheit) beschrieben.

Skizzieren Sie die Kurve $\mathbf{c}$.

Berechnen Sie die Masse des Drahtes, seinen Schwerpunkt und sein Trägheitsmoment bei Drehung um die x-Achse.

Hinweis: Benutzen Sie das Additionstheorem $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

Lösung:

Skizze: Obere Hälfte des Kreises mit Mittelpunkt $(3, 1)^T$ und Radius 2. **[1 Punkt]**

$\dot{\mathbf{c}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t)^T, \quad \Longrightarrow \quad \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = 2.$ **[1 Punkt]**

<u>Masse</u>: $\rho(\mathbf{c}(t)) = |2\cos(t)|.$ **[1 Punkt]**

$$M = \int_{\mathbf{c}} \rho(x, y)\, ds = 2\int_0^{\pi/2} (2\cos(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt = 8\,[\sin(t)]_0^{\pi/2} = 8\,.$$

<u>Schwerpunkt</u>: $(x_s, y_s)^T = (3, y_s)^T$ (Symmetrie) **[1 Punkt]**

$$\begin{aligned} M \cdot y_s &= \int_{\mathbf{c}} \rho(x, y)\, y\, ds = 2\int_0^{\pi/2} (2\cos(t))(1 + 2\sin(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \cos(t))(1 + 2\sin(t))\, dt = 8\int_0^{\pi/2} \cos(t) + \underbrace{2\sin(t)\cos(t)}_{\sin(2t)}\, dt = \qquad (*) \\ &= [8\sin(t) - 4\cos(2t)]_0^{\pi/2} = 8 - 4(-1 - 1) = 16. \end{aligned}$$

$(*)$ Alternativ: $u = \sin(t)$ und $8\int_0^1 (1 + 2u)du = 8\left[u + u^2\right]_0^1 = 16$

$y_s = 16/M = 2\,.$ **[2 Punkte]**

<u>Trägheitsmoment bzgl. der $x-$ Achse</u>

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{\mathbf{c}} \rho(\boldsymbol{x})a^2(\boldsymbol{x})\, ds = \int_{\mathbf{c}} \rho(x, y)y^2\, ds = 2\int_0^{\pi/2} (2\cos(t)) \cdot (1 + 2\sin(t))^2 \cdot 2\, dt \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \big(\cos(t) + 4\cos(t)\sin(t) + 4\cos(t)\sin^2(t)\big)\, dt \qquad u = \sin(t),\ \frac{du}{dt} = \cos(t) \qquad (**) \\ &= 8\int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} (1 + 4u + 4u^2)\, du = 8\left[u + 2u^2 + \frac{4u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{8 \cdot 13}{3} = \frac{104}{3} \end{aligned}$$

[4 Punkte]

$(**)$ Alternativ: $v = 1 + 2\sin(t)$, $\frac{dv}{dt} = 2\cos(t)$ und $4\int_1^3 v^2 du = 4\left[\frac{v^3}{3}\right]_1^3 = 4 \cdot \frac{26}{3}$

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 1-periodischen, ungeraden Fortsetzung von $f(x) = 2x^2 - x$ für $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

b) Gegeben sei $$f(t) = \begin{cases} 4t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4 - 4t & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & t \in [1, 2] \end{cases}$$

Skizzieren Sie die gerade 4-periodische Fortsetzung von f im Intervall $[-2; 6]$. Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der geraden, 4–periodischen Fortsetzung von f.

Konvergiert die Fourier-Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f?

Lösung:

a) Da die Funktion auf $\mathbb{R}$ ungerade ist, gilt $a_k = 0$, $\forall k$. **[1 Punkt]**

$$b_k = \tfrac{2}{0.5} \int_0^{0.5} (2x^2 - x) \sin(2k\pi x) dx$$

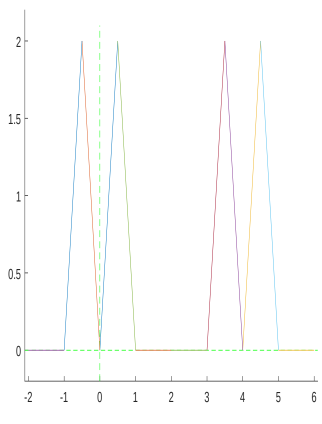
$$= -\frac{4}{2k\pi} \cos(2k\pi x)(2x^2 - x)\Big|_0^{0.5} + \frac{4}{2k\pi} \int_0^{0.5} (4x - 1) \cos(2k\pi x)\, dx$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2} \sin(2k\pi x)(4x - 1)\Big|_0^{0.5} - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{0.5} 4 \sin(2k\pi x)\, dx$$

$$= \frac{4}{2k^3\pi^3} \cos(2k\pi x)\Big|_0^{0.5} = \frac{2}{k^3\pi^3} (\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade,} \\ \frac{-4}{k^3\pi^3} & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe lautet: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2k\pi x)$. **[3 Punkte]**

b) **Skizze:** **[1 Punkt]**



$b_k = 0$ da Funktion gerade! **[1 Punkt]**

$T = 4, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)dt$$

$$= \int_0^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^1 (4-4t)dt = \frac{1}{2} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1\,.$$

[1 Punkt]

Für $k \in \mathbb{N}$ rechnet man wie folgt.

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_0^2 f(t)\cos(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= \int_0^{1/2} 4t\cos(\frac{k\pi}{2}t)dt + \int_{1/2}^1 (4-4t)\cos(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= 4\left[t\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} - 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}dt + 4\left[(1-t)\frac{\sin(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4)\frac{\sin(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}dt$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left(\sin\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\right) - \frac{8}{k\pi}\left[\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{k\pi}\left(\sin\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\right) - \frac{8}{k\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{16}{k^2\pi^2}\left[2\cos\left(\tfrac{k\pi}{4}\right) - \cos\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) - 1\right]$$

[2 Punkte]

Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe gegen f:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{16}{k^2\pi^2}\left[2\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right]\right\}\cos(\frac{k\pi}{2}t)$$

[1 Punkt]

Aufgabe 4:

Berechnen sie die reellen Fourier-Koeffizienten der 2π –periodischen Fortsetzungen von

$$g(t) = \sinh(t), \qquad t \in (-\pi, \pi]\,.$$

Wogegen konvergiert die Fourier-Reihe im Punkt $t = -\pi$?

Himweis: Gehen Sie für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten wie folgt vor:

- Schritt 1: Berechnung der Komplexen Fourier-Koeffizienten der 2π -periodisch fortgesetzten Funktionen
$$f(t) = e^t \qquad \text{bzw.} \qquad q(t) = e^{-t}, \qquad t \in (-\pi, \pi]\,.$$
- Schritt 2: Nutzen Sie $g(t) = \sinh(t) = \dfrac{f(t) - q(t)}{2}$
- Schritt 3: Berechnung der reellen Koeffizienten aus den komplexen Koeffizienten.

Lösung: (10 Punkte)

Wir bestimmen zunächst die Fourierreihen der 2π -periodisch fortgesetzten Funktionen

$$\left.\begin{array}{rcl} f(t) &=& e^t \\ q(t) &=& e^{-t} \end{array}\right\} \qquad t \in (-\pi, \pi]$$

Für die komplexen Koeffizienten rechnet man :

$$\gamma_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm t} e^0\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{\pm t}}{\pm 1}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pm\pi} - e^{\mp\pi}}{\pm 2\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\,.$$

Für $k \neq 0$ erhalten wir mit $\omega = 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm t} e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm t} e^{-ikt}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\pm 1 - ik)t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(\pm 1 - ik)t}}{\pm 1 - ik}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{\pm\pi}\, e^{-ik\pi} - e^{\mp\pi}\, e^{ik\pi}}{2\pi(\pm 1 - ik)} = \frac{e^{\pm\pi} - e^{\mp\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{\pm 1 - ik} \end{aligned}$$

Für f erhalten wir also

$$\gamma_{k,f} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{1 - ik} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k (1 + ik)}{1 + k^2}$$

$$e^t \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k,f} e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})(1 + ik)}{2\pi(1 + k^2)}\, e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)(1 + ik)}{\pi(1 + k^2)}\, e^{ikt}\,.$$

Für q erhalten wir

$$\gamma_{k,q} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{1+ik} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k(1-ik)}{1+k^2}$$

$$e^{-t} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k,q} e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})(1-ik)}{2\pi(1+k^2)} e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)(1-ik)}{\pi(1+k^2)} e^{ikt} .$$

Bemerkung: In diesem speziellen Fall gilt die Darstellung der γ_k auch für $k = 0$!

Für $g(t) = \sinh(t) = \dfrac{f(t) - q(t)}{2}$ erhält man

$$\gamma_k = \frac{\gamma_{k,f} - \gamma_{k,q}}{2} = \frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})(1+ik-(1-ik))}{4\pi(1+k^2)} = \frac{ik(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+k^2)} .$$

$$a_0 = 2\gamma_0 = 0 ,$$

$$a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} = \frac{ik(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+k^2)} + \frac{i(-k)(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+k^2)} = 0 ,$$

$$b_k = i(\gamma_{k,q} - \gamma_{-k,q}) = i\left(\frac{(ik - i(-k))(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1+k^2)}\right)$$

$$= \frac{2k(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^{k+1}}{2\pi(1+k^2)} = \frac{2k\sinh(\pi)(-1)^{k+1}}{\pi(1+k^2)}.$$

Es gilt

$$F_g(-\pi) = \tfrac{1}{2} \cdot (\lim_{t\to-\pi_-} g(t) + \lim_{t\to-\pi_+} g(t)) = \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\pi) + \sinh(-\pi)) = 0.$$