Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6

Umfrage: Bitte helfen Sie uns Mathe III in Ihrem Sinne zu planen und nehmen Sie sich 2 Minuten Zeit für eine Umfrage:

`https://www.limesurvey.uni-hamburg.de/index.php/533487?lang=de`

Aufgabe 1: (5 + 3 + 4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

a) $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx$, Tipp: Partialbruchzerlegung.

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$, Tipp: Partielle Integration.

c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx$, Tipp: Substitution.

Lösung:

a) Wir machen zunächst eine Partialbruchzerlegung.
Nennernullstellen: $x^2-7x+12=0 \implies x=3 \vee x=4$.
Der Ansatz: $\dfrac{1}{x^2-7x+12} = \dfrac{a}{x-3} - \dfrac{b}{x-4} = \dfrac{a(x-4)+b(x-3)}{(x-3)(x-4)}$
liefert die Bedingung: $1 = a(x-4)+b(x-3) = (a+b)x-4a-3b$.
Also das System $a+b=0$ und $-4a-3b=1$ mit der Lösung $-a=b=1$.

$$\int_5^c \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx = \int_5^c \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$= [\ln(x-4)-\ln(x-3)]_5^c = \left[\ln\left(\frac{x-4}{x-3}\right)\right]_5^c == \left[\ln\left(\frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)\right]_5^c$$

$$\int_5^\infty \frac{1}{x^2-7x+12}\,dx = \lim_{c\to\infty} \ln(\frac{1-\frac{4}{c}}{1-\frac{3}{c}}) - \ln(\frac{1}{2}) = \ln(1)+\ln(2) = \ln(2)\,.$$

b) Mittels partieller Integration mit $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}\,\ln(x) - \int \frac{-1}{x}\,\frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln(b)}{b} + \frac{1}{b}\right) \\ &\overset{l.H.}{=} 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1} = 1.\end{aligned}$$

c) Der Nenner wird $= 0$ für $x = 2$. Das Integral muss zerlegt werden:

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx + \int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx\,.$$

Jedes Integral muss für sich alleine existieren!

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}}\,dx \qquad u = 16-x^4,\ du = -4x^3dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+} -\frac{1}{4}\int_{u(0)}^{u(2-\epsilon)} \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0+} \sqrt{u}\Big|_{16}^{16-(2-\epsilon)^4} = 2\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{2+\epsilon}^{4} \frac{x^3}{\sqrt{x^4-16}}\,dx \qquad u = x^4-16,\ du = 4x^3dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{4}\int_{u(2+\epsilon)}^{u(4)} \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0+} \sqrt{u}\Big|_{16-(2+\epsilon)^4}^{240} = \frac{1}{2}\sqrt{240} = 2\sqrt{15}.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-16|}}\,dx = 2 + 2\sqrt{15}.$$

Aufgabe 2: (4+2+3 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass das uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty \frac{x^\alpha}{\sqrt{x^4+x^2+2}}\,dx$$

für $\alpha = 0$ konvergiert und für $\alpha = 1$ divergiert.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, ohne sie zu berechnen:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+2)\sqrt{x+1}}{5x-3x^2}\,dx\,,$

(ii) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{(x+1)\sqrt{x+2x^3}}{2x(2-x^4)}\,dx\,,$

Lösung : [4+3+3 Punkte]

a) Für den Fall $\alpha = 0$ gilt folgende Abschätzung

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}.$$

Das Integral $\int_3^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert (vgl. Folie 107 Vorlesung). Somit folgt aus dem Majorantenkriterium (Seite 110 Vorlesung), dass das zu untersuchende Integral konvergiert.

Für $\alpha = 1$ erhält man für $x \geq 3$ folgende Abschätzung

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+2}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4+2x^4}} = \frac{x}{\sqrt{4x^4}} = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x} \geq 0.$$

Das Integral $\int_3^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x$ divergiert (vgl. HÜ 6). Damit folgt aus der Umkehrung des Majorantenkriteriums, dass das zu untersuchende Integral divergiert.

Alternativ:

$$\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+2}}\mathrm{d}x \geq \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{2}\right]_3^b = \infty$$

b) (i) Für $x \in (0,1]$ gilt

$$\frac{(x+2)\sqrt{x+1}}{5x-3x^2} \geq \frac{2}{5x} > 0$$

Da $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergiert, divergiert nach der Umkehrung des Majorantenkriteriums auch

$$\int_0^1 \frac{(x+2)\sqrt{x+1}}{2x-3x^2}\,dx\,,$$

(ii) Für $x \geq 2$ kann man zum Beispiel wie folgt abschätzen

$$\left|\frac{(x+1)\sqrt{x+2x^3}}{2x(2-x^4)}\right| \leq \frac{(x+x)\sqrt{x^3+2x^3}}{2x(x^4-2)} \leq \frac{\sqrt{3x^3}}{x^4-2}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}\cdot x^{3/2}}{x^4-\frac{x^4}{8}} < \frac{2x^{3/2}}{\frac{7x^4}{8}} = \frac{16}{7}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

Da $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\frac{5}{2}}dx$ konvergiert (Seite 107 der Vorlesung), konvergiert nach dem Majorantenkriterium (Seite 110 Vorlesung) auch

$$\int_2^\infty \frac{(x+1)\sqrt{x+2x^3}}{2x(2-x^4)}\,dx.$$

Aufgabe 3: (7+3 Punkte)

a) $L(f)(s) := F(s) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ heißt Laplacetransformierte von der Funktion f.

Die Laplace-Transformation wird unter anderem zur Lösung von Differentialgleichungen verwendet. Sie ist für hinreichend glatte, für $t \to \infty$ höchstens exponentiell wachsende (d.h. $\exists \sigma, M \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t > 0$) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : t \mapsto f(t)$ definiert. Genaueres im dritten Semester.

Leiten Sie Formeln für $F'(s)$ (vgl. Vorlesung), $F''(s)$ und $F'''(s)$ her, die keine Ableitungssymbole mehr enthalten, also kein $\frac{d}{ds}$, $\frac{\partial}{\partial s}$, $'$ oder Ähnliches.
Versuchen Sie eine Formel für $F^{(n)}(s)$ aufzustellen, und beweisen Sie diese mittels Induktion.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Für welche $s \in \mathbb{R}$ existiert die Laplacetransformierte der Funktion $f(t) = e^{at}$, also das parameterabhängige uneigentliche Integral

$$F(s) := \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt ,$$

Lösung:

a)

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$
$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-st} \cdot f(t) \right) dt = \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))dt$$
$$F''(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^2 f(t)dt$$
$$F'''(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^3 f(t)dt$$

Vermutung: $F^{(n)}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(-t)^n \cdot f(t)dt$

Beweis: Induktion nach n.
Induktionsanfang: siehe oben.
Annahme: für ein festes, beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $F^{(n)}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(-t)^n f(t)dt$.

Dann folgt:

$$F^{(n+1)}(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-st}(-t)^n f(t) \right) dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^{n+1} f(t)dt .$$

b) Das uneigentliche Integral existiert genau dann, wenn $s > a$ ist, denn es gilt

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \lim_{y \to \infty} \int_0^y e^{-(s-a)t} dt = \lim_{y \to \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^y .$$

Der Grenzwert existiert für $(s-a) \leq 0$ nicht. Für $s > a$ erhält man

$$F(s) == \lim_{y \to \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^y = \lim_{y \to \infty} \frac{e^{-(s-a)y}}{-(s-a)} - \frac{e^0}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a} .$$

Aufgabe 4: (2+4 Punkte)

Es sei K der Rotationskörper, der bei der Drehung des Funktionsgraphen von $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ um die x-Achse entsteht.

a) Berechnen Sie das Volumen von K.

b) Berechnen Sie die Mantelfläche von K.

Lösung:

a) Volumen

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^3\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 \, dx = \frac{\pi}{7} \left[x^7\right]_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

b) Mantelfläche

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + ((x^3)')^2} \, dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} \, dx \\ &= 2\pi \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{u} \, \frac{1}{36} \, du \qquad u = 1 + 9x^4, \ \frac{du}{dx} = 36x^3 \qquad x^3 dx = \frac{du}{36} \\ &= \frac{\pi}{18} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^{10} = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

Abgabe bis 17.07.2020, 17 Uhr.