Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Auf vielfachem Wunsch werden die Videos der Hörsaalübungen 2 und 3 ab ca. 20.06. erneut für ca. 14 Tage ins Netz gestellt. Ansonsten gilt wie bisher: Alle Videos bleiben nur 14 Tage im Netz.

Aufgabe 1: (1+1+2+3+3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $$\int \sin(\alpha \cdot x)\, dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

b) $$\int_0^\pi \sin(\alpha \cdot x)\, dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

c) $$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\, dx\,.$$

d) $$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\, dx. \qquad \text{Tipp: } \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t) + C\,.$$

e) $$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx.$$

Lösung:

a) Mit der Substitution $y = \alpha \cdot x$ erhält man $dy = \alpha \cdot dx$ und
$$\int \sin(\alpha \cdot x)\, dx = \int \sin y \frac{dy}{\alpha} = -\frac{\cos(y)}{\alpha} + C = -\frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha} + C\,.$$

b) Hier müssen bei der Substitution $y = \alpha \cdot x$ die Grenzen angepasst werden, wenn man auf die Rücksubstitution verzichten möchte:

$$\int_0^\pi \sin(\alpha \cdot x)\, dx = \int_0^{\alpha \cdot \pi} \sin y \frac{dy}{\alpha} = -\left.\frac{\cos(y)}{\alpha}\right|_0^{\alpha\pi}$$
$$= -\frac{\cos(\alpha \cdot \pi) - \cos(0)}{\alpha} = \frac{1 - \cos(\alpha \cdot \pi)}{\alpha}\,.$$

c) $$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\, dx\,.$$

Mit der Substitution $y = 1 + x^3$, $dy = 3x^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ erhält man

$$I = \int_1^2 \frac{1}{3y^3}\, dy \;=\; \frac{1}{-6y^2}\Big|_1^2 \;=\; \frac{1}{6}\,(1 - \frac{1}{2^2}) \;=\; \frac{3}{6\cdot 4} \;=\; \frac{1}{8}.$$

d) $$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{9}+1}\, dx$$

Mit der Substitution $t = \frac{x+1}{3}$ und $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3}$ erhält man

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\, dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+t^2}\, 3dt \;=\; \frac{1}{3}\,\arctan(t) + C = \frac{1}{3}\,\arctan(\frac{x+1}{3}) + C\,.$$

e) $$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx.$$

Mit der Substitution $y = \cos(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = -\sin(x)$ erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx \;&=\; \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{1+y^2} \;=\; \int_{\cos(\pi)}^{\cos(0)} \frac{1}{1+y^2}\,.\\ &=\; \arctan y\big|_{-1}^{1} \;=\; \arctan(1) - \arctan(-1)\\ &=\; \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) \;=\; \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: (3+3+4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x^2+2x)\cdot\cos(3x)\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int_{1/2}^{e/2} (x+3)\cdot\ln(2x)\,dx$ c) $\displaystyle\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx\,.$

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x^2+2x)\cos(3x)\,dx &= \left[(x^2+2x)\,\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2x+2)\frac{\sin(3x)}{3}\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{108}+\frac{\pi}{9} - \left[(2x+2)\,\frac{-\cos(3x)}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\frac{-\cos(3x)}{3}\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{108}+\frac{\pi}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\,\frac{\sin(3x)}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{108}+\frac{\pi}{9}-\frac{8}{27}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_{0.5}^{\frac{e}{2}} (x+3)\ln(2x)\,dx &= \left[(\frac{x^2}{2}+3x)\ln(2x)\right]_{0.5}^{\frac{e}{2}} - \int_{0.5}^{\frac{e}{2}} (\frac{x^2}{2}+3x)\frac{2}{2x}\,dx \\
&= \frac{e^2}{8}+\frac{3e}{2} - \int_{0.5}^{\frac{e}{2}} \frac{x}{2}+3\,dx = \frac{e^2}{8}+\frac{3e}{2} - \left[\frac{x^2}{4}+3x\right]_{0.5}^{\frac{e}{2}} = \frac{e^2+25}{16}\,.
\end{aligned}
$$

c) Aus

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\cos(2x)\,dx &= -e^{-x}\cos(2x) - \int -e^{-x}(-2\sin(2x))\,dx \\
&= -e^{-x}\cos(2x) + e^{-x}(2\sin(2x)) - \int e^{-x}4\cos(2x)\,dx + \hat{C} \\
\Longrightarrow 5\int e^{-x}\cos(2x)\,dx &= e^{-x}(2\sin(2x)) - \cos(2x)) + \hat{C} \\
\Longrightarrow \int e^{-x}\cos(2x)\,dx &= \frac{e^{-x}}{5}\,(2\sin(2x)-\cos(2x)) + C.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: (10 Punkte , Klausur 2010/11).

Gegeben sei $f(x) = \dfrac{2x^2+10x-2}{(x^2-3x+2)(x^2+9)}$.

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Lösung:

Reelle Nennernullstellen: p-q-Formel, quadratische Ergänzung oder Vieta liefern

$$x_1 = 1\,, \qquad x_2 = 2\,. \qquad [1 \text{ Punkt}]$$

Ansatz für die Funktion:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+9} \qquad [1 \text{ Punkt}]$$

Zu erfüllen ist:

$$a(x-1)(x^2+9) + b(x-2)(x^2+9) + (cx+d)(x-1)(x-2) = 2x^2+10x-2$$

Einsetzen ergibt:

$$x=2: \quad a\cdot 1\cdot 13 \;=\; 8+20-2 \iff a = 2\,,$$

$$x=1: \quad b\cdot(-1)\cdot 10 \;=\; 2+10-2 \iff b = -1\,,$$

$$x=0: \quad a\cdot(-9)+b\cdot(-18)+d\cdot 2 \;=\; -2 \iff d = -1\,.$$

Koeffizientenvergleich für die höchste Potenz (x^3) ergibt

$$x^3: \quad a+b+c=0 \iff c=-1\,. \qquad [\text{Koeffizienten: 2 Punkte}]$$

$$\int f(x) = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+9}\,dx$$

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{x^2+9}\,dx\,. \qquad [2 \text{ Punkte}]$$

Man substituiert $u = x^2+9,\ du = 2x\cdot dx$ [1 Punkt]

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\,dx.$$

Hier substituiert man $y = \frac{x}{3},\ dx = 3dy$ [1 Punkt]

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|u| - \tfrac{3}{9}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy.$$

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+9) - \tfrac{1}{3}\arctan\left(\tfrac{x}{3}\right) + C \quad [2 \text{ Punkte}]$$

Aufgabe 4: (4+6+6 Punkte)

a) Gegeben ist das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x)}\,dx\,.$

(i) Zeigen Sie, dass das Integral mit Hilfe geeigneter Substitutionen in das Integral

$$\int \frac{1+t^2}{t(1+t^2+2t)}\,dt$$

überführt werden kann.

Nutzen Sie zunächst: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und anschließend Seite 103 der Vorlesung.

(ii) Berechnen Sie das in i) erhaltene Integral und führen Sie die Rücksubstitution durch.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)e^x}{e^{2x}+4}\,dx\,.$

Hinweise zu Teil b): $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Die Substitution $y = e^{2x}$ ist hier etwas günstiger als die Standardsubstitution $y = e^x$.

Lösung:

a) (i) Zunächst gilt

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{2}{\sin(2x) + \sin^2(2x)}\,dx\,,$$
$$= \int \frac{1}{\sin(y) + \sin^2(y)}\,dy$$

Mit der Standardsubstitution $t = \tan(\frac{y}{2})$, $\sin(y) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ folgt

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{2}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\right)}\,dt$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)}{2t(1+t^2)+4t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t(1+t^2+2t)}\,dt$$

(ii)

$$\int \frac{1+t^2}{t(1+t^2+2t)}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt$$
$$= \int \left(\frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}\right)\,dt$$

wobei $1 + t^2 = a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct$ gelten muss.

Einsetzen von $t = 0$ bzw. $t = -1$ ergibt

$$a = 1 \qquad c = -2$$

Koeffizientenvergleich der quadratischen Terme : $t^2 = at^2 + bt^2 = t^2 + bt^2 \implies b = 0$.

Für das Integral erhält man also

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x)}\,dx = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{0}{1+t} + \frac{-2}{(1+t)^2}\right) dt$$

$$= \ln|t| + \frac{2}{1+t} + C = \ln|\tan(x)| + \frac{2}{1+\tan(x)} + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)e^x}{e^{2x}+4}\,dx = \int \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,e^x}{e^{2x}+4}\,dx = \int \frac{e^{2x}-1}{2(e^{2x}+4)}\,dx$

$$= \int \frac{y-1}{2(y+4)}\,\frac{dy}{2y} \qquad \text{(Substitution: } y = e^{2x},\ \tfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}\text{)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{y-1}{y(y+4)}dy = \frac{1}{4}\int \frac{a}{y} + \frac{b}{y+4}dy$$

Koeffizientenvergleich:

$y - 1 = a(y+4) + by \implies 4a = -1 \quad$ und $a + b = 1$

Also $a = -1/4$ und $b = 5/4$.

$$\int \frac{\sinh(x)e^x}{e^{2x}+4}\,dx = \frac{1}{16}\int -\frac{1}{y} + \frac{5}{y+4}dy$$

$$= \frac{1}{16}\,(5\ln|y+4| - \ln|y|) + C = \frac{1}{16}\,\big(5\ln(e^{2x}+4) - 2x\big) + C\,.$$

Abgabe bis: 03.07.2020, 17 Uhr