Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{x+1}$.

$A =$ sei der Flächeninhalt des Flächenstücks $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \frac{1}{x+1}\right\}$.

Also $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Zerlegung

$$Z_n := \left\{ x_{kn} := \frac{k}{n},\, k = 0, 1, 2, \cdots, n \right\}.$$

$O_f(Z_n)$ und $U_f(Z_n)$ seien, wie in der Vorlesung definiert, die Obersumme und die Untersumme von f zur Zerlegung Z_n.

a) Berechnen Sie $O_f(Z_4)$ und $U_f(Z_4)$. Wie groß ist der absolute Fehler höchstens, wenn man $\dfrac{O_f(Z_4) + U_f(Z_4)}{2}$ als Näherung für A verwendet?

b) Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{O_f(Z_n) + U_f(Z_n)}{2} - A \right| \le \frac{1}{200}.$$

Lösung:

a) Mit $Z_4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\}$
erhalten wir die Funktionswerte: $\{\frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}\}$.
Jedes Teilintervall hat die Länge $h = \frac{1}{4}$. Damit gilt

$$O_f(Z_4) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{4} + \frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{5\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 5\cdot 7 + 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{210 + 168 + 140 + 120}{840} = \frac{638}{840}\,(= 0.7595...)$$

$$U_f(Z_4) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7}+\frac{4}{8}\right) = \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} = O_f(Z_4) - \frac{1}{8} = \frac{533}{840}\,(= 0.6345...)$$

(4 Punkte)

Wegen $U_f(Z_4) \le A \le O_f(Z_4)$ gilt

$$\left|\,\frac{O_f(Z_4)+U_f(Z_4)}{2} - A\,\right| \le \frac{O_f(Z_4)-U_f(Z_4)}{2} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4}{4}-\frac{4}{8}\right) = \frac{1}{16}\,.$$ **(2 Punkte)**

b) Es gilt

$$\left|\,\frac{O_f(Z_n)+U_f(Z_n)}{2} - A\,\right| \le \frac{O_f(Z_n)-U_f(Z_n)}{2} = \frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{n}{n}-\frac{n}{2n}\right) = \frac{1}{4n}\,.$$

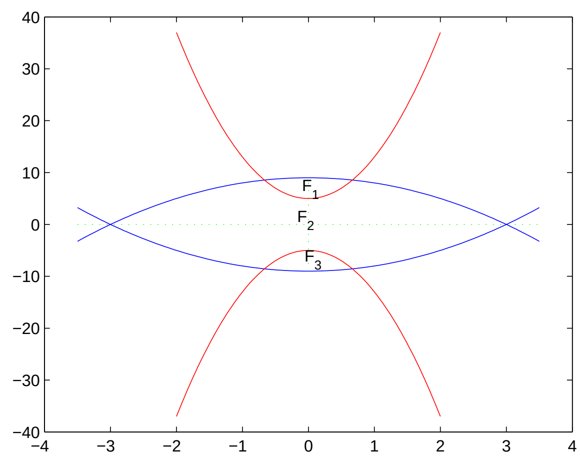
Mit $n \ge 50$ erreicht man also sicher die geforderte Genauigkeit. **(2 Punkte)**

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben ist $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - 9 \, \leq y \, \leq 9 - x^2 \, .\}$

im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Die Parabeln $p_1(x) = 8x^2 + 5$ und $p_2(x) = -8x^2 - 5$ zerlegen F in drei disjunkte Teile F_1, F_2 und F_3. Berechnen Sie die Flächeninhalte von F_1, F_2 und F_3.



Lösung:

Wegen $x^2 - 9 = 9 - x^2 \iff 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9$

schneiden sich die beiden Parabeln $y = x^2 - 9$ und $\tilde{y} = 9 - x^2$ in den Punkten $(\pm 3, 0)$.

Den gesuchten Flächeninhalt von F erhält man also als $\quad A = \displaystyle\int_{-3}^{3} (9 - x^2) - (x^2 - 9)\, dx$
(2 Punkte)

oder, wegen der Symmetrien, als

$$A \, = \, 4 \int_0^3 (9 - x^2)\, dx \, = \, 4 \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 4(27 - 9) = 72. \ \textbf{(2 Punkte)}$$

Für die Teilstücke berechnen wir die Schnittpunkte der Parabeln $y = 9 - x^2$ und $\hat{y} = 5 + 8x^2$:

$$9 - x^2 = 5 + 8x^2 \iff 9x^2 \, = \, 4 \iff x = \pm \frac{2}{3} \ \textbf{(1 Punkt)}$$

Für den Flächeninhalt des oberen (unteren) Flächenstücks $F_1 \, (F_3)$ erhalten wir:

$$A_1 = A_3 = 2 \int_0^{\frac{2}{3}} (9 - x^2) - (5 + 8x^2)\, dx = 2 \left[4x - 3x^3 \right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{32}{9} \, . \ \textbf{(2 Punkte)}$$

Für den Flächeninhalt des mittleren Flächenstücks F_2 ergibt sich $A_2 = 72 - \dfrac{64}{9}$. **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: (3+4+5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+4x^2+5}{x^2+1}\,dx\,.$

Hinweis: Polynomdivision und Tabelle aus den Seiten 82/83 der Vorlesung!

b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}+2+e^{\frac{x}{2}}}{e^x}\,dx\,.$

Hinweis: Linearität und Tabelle aus den Seiten 82/83 der Vorlesung!

c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left((x^4+2x^2+3)\sin(x)+\frac{4x+5}{x^2-1}\right)dx\,.$

Hinweis: Linearität, Symmetrie und Tabelle aus den Seiten 82/83 der Vorlesung!

Lösungshinweise:

a) Polynomdivision ergibt $x^4+4x+5 \;=\; (x^2+1)(x^2+3)+2\,.$ **(1 Punkt)** .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4+4x^2+5}{x^2+1}dx \;&=\; \int_0^1 x^2+3+\frac{2}{x^2+1}\,dx\\ &=\; \frac{x^3}{3}+3x+2\arctan(x)\Big|_0^1\\ &=\; \frac{1}{3}+3+2\arctan(1)-2\arctan(0)=\frac{10}{3}+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$ **(2 Punkte)**

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}+2+e^{\frac{x}{2}}}{e^x}\,dx &= \int_0^{\ln(2)} e^x+2e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\,dx\\ &=\; e^x-2e^{-x}-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{\ln(2)} \;=\; e^{\ln(2)}-\frac{2}{e^{\ln(2)}}-\frac{2}{\sqrt{e^{\ln(2)}}}-(1-2-2)\\ &=\; 2-1-\frac{2}{\sqrt{2}}+3 \;=\; 4-\sqrt{2}.\end{aligned}$$ **(4 Punkte)**

c)

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left((x^4 + 2x^2 + 3) \sin(x) + \frac{4x+5}{x^2-1} \right) dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^4 + 2x^2 + 3) \sin(x) dx \; + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x}{x^2-1}\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{5}{x^2-1}\, dx
\end{aligned}
$$

Die Funktionen $(x^4+2x^2+3)\sin(x)$ und $\dfrac{4x}{x^2-1}$ sind ungerade. Daher verschwinden das erste und das zweite Integral. **(2 Punkte)**

$$
\begin{aligned}
I &= -\,5 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx = -\,10 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx \\
&= -\,10 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -5 \left(\ln \left(\frac{\frac{1}{2}+1}{\left|\frac{1}{2}-1\right|} \right) - \ln \left(\frac{0+1}{|0-1|} \right) \right) \\
&= -5 \ln(3)\,. \qquad\qquad \textbf{(3 Punkte)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: (8 + 6 Punkte)
Fehlerabschätzungen: Kür, etwas anspruchsvoller

Die Funktion $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ wird Integralsinus genannt. Der Integrand ist stetig fortsetzbar nach 0 mit $Si(0) = 0$, daher lokal integrierbar in $[0, \infty)$.

Bemerkung: Der Integralsinus wird in der Signalverarbeitung benötigt, um die Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters zu beschreiben. Mit Hilfe von $Si(\infty)$ bestimmt man die Einschwingzeit. Ein idealer Tiefpassfilter ist ein Filter, der alle Frequenzanteile unterhalb einer Bandbreite B durchläßt und alle Frequenzanteile oberhalb der Bandbreite B blockiert.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe (Potenzreihe) der Funktion $Si(x)$ mit $x_0 = 0$, sowie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; 0)$ zu Si. Verwenden Sie bei Bedarf stetige Ergänzungen der auftretenden Funktionen.

Hinweise: Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Potenzreihe von $Si'(x)$.

b) Berechnen Sie $T_3(0.25; 0)$ und schätzen Sie den absoluten Fehler $|Si(0.25) - T_3(0.25; 0)|$ ab.

Hinweis für die Fehlerabschätzung: Leibniz-Reihe aus Analysis I.

c) Es seien folgende Werte der Funktion $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ bekannt.

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$Si(x)$	0.000000	0.19955609	0.39646146	0.58812881

Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Interpolationspolynoms p_n einen Näherungswert für $Si(0.25)$ mit einem theoretisch abgesicherten absoluten Fehler $|f(0.25) - p_n(0.25)|$ von maximal 0.002 und einem relativen Fehler $\frac{|f(0.25)-p_n(0.25)|}{|f(0.25)|}$ von maximal 1% .

Hinweise: Es müssen nicht alle Daten verwendet werden.
Es gilt $|Si''(x)| < 0.4, \forall x \in [0, 1]$.

Lösung:

a) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung gilt:

$$Si'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$(Si(x))' = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$Si(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$$

Wegen $Si(0) = 0$ folgt $C = 0$. **(4 Punkte)**

$T_3(x;0) = x - \frac{x^3}{3!\cdot 3}$, $\quad T_3(0.25;0) = 0.2491319444\cdots$. **(1 Punkt)**

Für jedes feste $x \in (0,1)$ ist die Potenzreihe eine alternierende monoton fallende Nullfolge. Speziell für $x = \frac{1}{4}$

$$Si(\frac{1}{4}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k+1}\cdot(2k+1)\cdot(2k+1)!}$$

Die Konvergenz folgt aus dem Leibniz- Kriterium aus Analysis I. Die Fehlerabschätzung nach Leibniz liefert für den Absoluter Fehler $A(x)$:

$$|A(0.25)| \leq \left|\frac{1}{4^5\cdot 5\cdot 5!}\right| = \frac{1}{4^5\cdot 600} = \frac{1}{64\cdot 16\cdot 600} < \frac{1}{600\cdot 1000}.$$ **(3 Punkte)**

b) Wir versuchen unser Glück mit einer linearen Interpolation mit den Daten zu $x = 0.2$ und $x = 0.4$.

$$Si(0.25) \approx p_1(0.25) = Si(0.2) + \frac{Si(0.4) - Si(0.2)}{0.2}(0.25-0.2) = 0.24878243.$$ **(2 Punkte)**

Nach dem Hinweis gilt $|Si''(x)| = \left|\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}\right| \leq 0.4$. Für den absoluten Fehler gilt dann

$$\begin{aligned}|A(0.25)| &= \frac{|f''(\theta)|}{2!}(0.4-0.25)(0.25-0.2) \leq (0.2)\frac{15\cdot 5}{100\cdot 100}\\ &= \frac{2\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 20\cdot 20} = \frac{6}{4000} = 0.0015.\end{aligned}$$ **(2 Punkte)**

Da der Integrand positiv ist, gilt $Si(0.25) > Si(0.2) > 0$, was man natürlich auch an der positiven Ableitung von Si ablesen kann. Für den relativen Fehler gilt damit

$$|R(0.25)| \leq \frac{0.0015}{Si(0.2)} < \frac{0.0015}{0.199} < \frac{0.0015}{0.1500}\cdots = 0.01.$$ **(2 Punkte)**

Die errechnete Approximation hat also die erforderliche Genauigkeit.