Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1: (3 + 7 Punkte)

a) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2 - x^2 - 2\cos(x)}{3x^4} & \text{für } x \neq 0\,, \\ -\dfrac{1}{36} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

b) Bestimmen Sie für die Funktion $g(x) = \dfrac{x(6\sin(x) + x^3)}{2 - \cos(2x)}$ das Taylorpolynom $T_5(x; x_0)$ fünften Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung:

a) Für $x \neq 0$:

$$\frac{2 - x^2 - 2\cos(x)}{3x^4} = \frac{2 - x^2 - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}{3x^4}$$

$$= \frac{2 - x^2 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)}{3x^4} = \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k)!}}{3x^4}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} x^{2k-4}}{3 \cdot (2k)!} = -\frac{1}{36} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} x^{2k-4}}{3 \cdot (2k)!}\,.$$

Offensichtlich gilt die Entwicklung auch in $x_0 = 0$.

b) [5 Punkte] $g(x) = \dfrac{x(6\sin(x) + x^3)}{2 - \cos(2x)}$

Die Funktion g ist gerade, da der Zähler und der Nenner gerade sind. Für das Taylorpolynom macht man daher einen Ansatz, der keine ungeraden Potenzen enthält.

$$\frac{x(6\sin(x) + x^3)}{2 - \cos(2x)} = \frac{x\left(x^3 + 6x - 6\dfrac{x^3}{3!} + 6\dfrac{x^5}{5!}\right) + O(x^8)}{2 - \left(1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!}\right) + O(x^6)}$$

$$= \frac{6x^2 + O(x^6)}{1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + O(x^6)$$

$$\iff 6x^2 = \left(1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4\right)\left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4\right) + O(x^6)$$

$$\iff 6x^2 = a_0 \; + \; (a_2 + 2a_0)x^2 \; + \; (a_4 + 2a_2 - \frac{2}{3}a_0)x^4 \; + \; O(x^6)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun

$$0 = a_0, \quad 6 = a_2 + 2a_0, \quad 0 = a_4 + 2a_2 - \frac{2}{3}a_0$$

$$\Longrightarrow a_0 = 0, \quad a_2 = 6, \quad a_4 = -12\cdot$$

Damit erhält man

$$T_5(x;0) = 6x^2 - 12x^4\cdot$$

Nutzt man die Symmetrie der Funktion nicht aus, so erhält man mit dem Ansatz

$$\frac{x(6\sin(x) + x^3)}{2 - \cos(2x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + O(x^6)$$

zusätzlich zu den obigen Koeffizienten $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ und damit natürlich das gleiche Taylorpolynom.

Aufgabe 2: (6 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen folgender Funktionen zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2-x}\right)^3, \qquad -2 < x < 2,$

b) $g(x) = \dfrac{e^x}{1-x^2}, \qquad -1 < x < 1.$

Lösung:

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2-x}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^3,$

$$\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'' = \left((1-\frac{x}{2})^{-1}\right)'' = \left((-1)(-\frac{1}{2})(1-\frac{x}{2})^{-2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot(-\frac{1}{2})(1-\frac{x}{2})^{-3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^3$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right)'' = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+2}}(x^k)''\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2^{k+2}}(x^{k-1})'\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k(k-1)}{2^{k+2}}\,x^{k-2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+2)(k+1)}{2^{k+4}}x^k\right)$$

b) Nach Vorlesung gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k$$

$$g(x) = \frac{e^x}{1-x^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{1+(-1)^l}{2(k-l)!}\right)x^k$$

$$= 1 + x + (1+\frac{1}{2!})x^2 + (1+\frac{1}{3!})x^3 + (1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!})x^4 + (1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!})x^5 + \cdots$$

Aufgabe 3: (9 + 4 Punkte)

a) (Leicht geänderte Aufgabe aus Klausur 2006, Struckmeier/Kiani)
Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion $f(x) = x\cos(x)$ zu den folgenden Daten:

x_k	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$
$f(x_k)$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$

Berechnen Sie $p_2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ und zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler die folgende Ungleichung gilt:

$$\left|p_2\left(\frac{\pi}{5}\right) - f(\frac{\pi}{5})\right| < \frac{32\pi^4}{10000}\,.$$

b) Zu berechnen sei eine Formel für $Q(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2$. Aus Analysis I erinnern Sie sich gerade noch daran, dass man die Summe als ein Polynom dritten oder vierten Grades in n darstellen kann. Leider ist Ihnen die genaue Formel entfallen. Sie haben weder Internet noch ein hilfreiches Buch zur Hand. Leiten Sie die Formel mit Hilfe der polynomialen Interpolation her.

Tipp: Sie können $Q(n)$ für kleine n sicher auch ohne Hilfsmittel berechnen. Das Polynom muss für diese kleinen n natürlich auch das richtige Ergebnis liefern.

Lösung:

a) Newton-Schema

$$\begin{array}{cccc}
x_j & y_j = [y_j] & [y_{j-1,j}] & [y_{j-2,j}] \\
\hline
-\frac{\pi}{3} & -\frac{\pi}{6} = [y_0] & & \\
 & & \frac{1}{2} & \\
0 & 0 = [y_1] & & 0 \\
 & & \frac{1}{2} & \\
\frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{6} = [y_2] & &
\end{array}$$

[2 Punkte]

ergibt $\quad p_2(x) = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **[1 Punkt]**

Damit gilt $\quad p_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{10}\,.$ **[1 Punkt]**

Für die Fehlerabschätzung benötigt man die dritte Ableitung von f.

$$f'(x) = \cos x - x\sin x \qquad f''(x) = -2\sin x - x\cos x$$

$$f'''(x) = -3\cos x + x\sin x$$ **[2 Punkte]**

Für den Interpolationsfehler gilt mit einem $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\left|p_2\left(\frac{\pi}{5}\right) - f(\frac{\pi}{5})\right| = \left|\frac{f'''(\theta)}{3!}(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{5}-0)(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3})\right| \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= |-3\cos(\theta)+\theta\sin(\theta)| \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \frac{2\pi}{15} \leq (|-3\cos(\theta)| + |\theta\sin(\theta)|) \cdot \frac{8\pi^3}{3\cdot 5\cdot 225}$$

$$\leq \left(3+\frac{\pi}{3}\right)\frac{8\pi^3}{3\cdot 1125} < \frac{4\pi}{3}\frac{8\pi^3}{3\cdot 1125} = \frac{32\pi^4}{9\cdot 1125} < \frac{32\pi^4}{10000}\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Wir wählen 5 willkürliche Zahlen $n_k \in \mathbb{N}$ und bestimmen das Interpolationspolynom zu den Daten $n_k, Q(n_k); k = 0,1,2,3,4$. Zum Beispiel:

1	1				
2	5	4			
3	14	9	$\frac{5}{2}$		
4	30	16	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{3}$	
5	55	25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	0

[3 Punkte]

Damit erhalten wir

$$Q(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4(n-1)+\frac{5}{2}(n-1)(n-2)+\frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dieser Ausdruckt stimmt natürlich mit dem Ausdruck $\frac{n}{6}(2n+1)(n+1)$ aus dem 1. Semester überein.

Aufgabe 4: (7 + 5 Punkte)

a) Es sei Ihnen die folgende Wertetabelle vorgelegt:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sin(x)$	0.000000	0.099833	0.198669	0.295520	0.389418	0.479426

Berechnen Sie unter Verwendung eines Interpolationspolynoms möglichst niedrigen Grades eine Näherung für den Wert von $\sin(0.25)$ mit einem gesicherten absoluten Fehler von höchstens 10^{-4}. Dabei gehen Sie bitte davon aus, dass Ihr Taschenrechner zwar die elementaren Operationen $+, -, *, /$ durchführen kann, aber die $\sin, \cos,$ etc. Tasten ausgefallen sind. Gehen Sie bei der Fehlerabschätzung davon aus, dass die Tabellenwerte exakt sind.

b) (Kür: etwas schwieriger!)

Es sollen nun Werte der Sinusfunktion zu äquidistanten Stützstellen $x_k := k \cdot h$, $k = 0, \cdots, 1/h$ so tabelliert werden, dass aus der Tabelle für alle $x \in [0, 1]$ durch lineare Interpolation Näherungen für $\sin(x)$ bestimmt werden können, deren Fehler nicht größer als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ ausfällt. Gehen Sie wieder davon aus, , dass die Tabellenwerte exakt sind.

Bestimmen Sie eine Schrittweite h, so dass der Interpolationsfehler kleiner als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ wird.

Lösung:

a) Wir versuchen unser Glück mit der linearen Interpolation. Eine apriori Fehlerabschätzung ergibt:

$$|\sin(0.25) - p_1(0.25)| \leq \left| \frac{f''(\tau)}{2!}(0.25 - 0.2)(0.25 - 0.3) \right| \leq \sin(0.3) \cdot 0.00125 = 0,0003694$$

Das reicht leider nicht um garantieren zu können, dass die gewünschte genauigkeit mit linearer Interpolation erreicht wird. **(3 Punkte)**

Zur Approximation mit einem quadratischen Polynom nimmt man die Daten zu 0.1, 0.2, 0.3 oder die Daten zu 0.2, 0.3, 0.4. Die Fehlerabschätzung liefert nun z.B. :

$$\begin{aligned} |\sin(0.25) - p_2(0.25)| &\leq \left| \frac{f'''(\tau)}{3!}(0.25 - 0.1)(0.25 - 0.2)(0.25 - 0.3) \right| \\ &\leq \cos(\tau) \cdot \frac{0.000375}{6} \leq 0.0000625 \qquad \text{Das reicht!!} \ \textbf{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

0.1	0.099833		
0.2	0.198669	0.98836	
0.3	0.295520	0.96851	−0.09925

$\sin(0.25) \approx 0.099833 + 0.98836(0.25 - 0.1) - 0.09925(0.25 - 0.1)(0.25 - 0.2) = 0.2473426\,.$
(2 Punkte)

b) **(5 Punkte)**

Der Fehler der linearen Interpolation von $\sin(x)$ läßt sich für $x = x_i + \theta h \in [x_i, x_{i+1}]$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}|R_1(x)| &= \left|\frac{f''(\tau)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| \\ &= \left|\frac{-\sin(\tau)}{2!}(\theta h)(h-\theta h)\right| = \frac{h^2}{2}\,\sin(\tau)\,\theta(1-\theta)\end{aligned}$$

Es gilt $\quad 0 \le \sin(\tau) < 1, \qquad \forall\,\tau \in [0,1]\,.$

Die Funktion $\tilde\omega(\theta) := \theta(1-\theta),\ \theta \in [0,1]$ nimmt ihre Extrema am Rand von $[0,1]$ oder für

$\tilde\omega'(\theta) = (\theta - \theta^2)' = 1 - 2\theta = 0$

also $\theta = 0.5$ an.

Es gilt $\tilde\omega(0) = \tilde\omega(1) = 0 \qquad$ und $\qquad \tilde\omega(0.5) = 0.25\,.$

Insgesamt haben wir also

$$|R_1(x)| = \frac{h^2}{2}\,\sin(\tau)\,\theta(1-\theta) < \frac{h^2}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{h^2}{8}$$

Es genügt also $\frac{1}{8}h^2 \le \frac{1}{2}10^{-4}$ oder $h \le 2.10^{-2}$ zu fordern.

Abgabe bis: 30.05.2020, 17 Uhr