Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{a)} & f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, & f_n(x) := \sin(nx)\,, \\
\textbf{b)} & g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, & g_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right)\,, \\
\textbf{c)} & h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h_n(x) := x\left(1 + \frac{1}{n}\right)\,, \\
\textbf{d)} & q_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, & q_n(x) := \dfrac{x^n}{1 + 2x^n}\,.
\end{array}
$$

Hinweis zu b) $|\sin(x)| \le |x|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

Lösung:

a) Die Folge der Funktionen f_n konvergiert nicht einmal punktweise, da zum Beispiel $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ nicht konvergiert.

b) Die Folge der Funktionen g_n konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Zu jedem vorgegbenen $\epsilon > 0$ gilt

$$n > \frac{4\pi}{\epsilon} \implies \|g_n - 0\|_\infty = \max_{x\in[0,2\pi]} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right) - 0\right| \le \max_{x\in[0,2\pi]} \left|\frac{x}{n}\right| \le \left|\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{\epsilon}}\right| = \frac{\epsilon}{2}\,.$$

c) Die Folge $h_n(x)$ konvergiert für festes x gegen $h(x) = x$. Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise.

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn es gilt zum Beispiel:

$|h_n(2n) - h(2n)| = \left|2n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 2n\right| = \frac{2n}{n} = 2\,.$

Für $\epsilon < 2$, zum Beispiel $\epsilon = 1$, gibt es also kein $N \in \mathbb{N}$ mit

$\|h_n - h\|_\infty < \epsilon \qquad \forall n \ge N\,.$

d) Die Funktionenfolge q_n konvergiert punktweise, denn

$$q(x) := \lim_{n\to\infty} q_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le x < 1\,, \\ \frac{1}{3} & \text{falls } x = 1\,, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x > 1\,. \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion nicht stetig ist.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $g_n \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) \,:=\, \sum_{k=0}^{n} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^k\,,$

Tipp: $\forall a \in]-1,1[: \ \sum_{k=0}^{n} a^k \,=\, \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,.$

b) $h_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad h_n(x) \,:=\, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2+1}\,,$

Tipp: Majorantenkriterium von Weierstraß.

c) $q_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad q_n(x) \,:=\, \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin(kx)}{k^2+1}\right)'\,,$

Lösung:

a) $g_n \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) \,:=\, \sum_{k=0}^{n} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^k$

Es gilt wieder $g_n(0) = 0$. Für $x \in (0,1]$ erhält man

$$g_n(x) = x^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)} \;=\; 2\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Wegen $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \in [\frac{1}{2}, 1)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{n+1} = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 2 \qquad \forall x \in (0,1]$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \in (0,1] \end{cases}$$

Da die Grenzfunktion nicht stetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

b) $h_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad h_n(x) \,:=\, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2+1}\,,$

Wegen

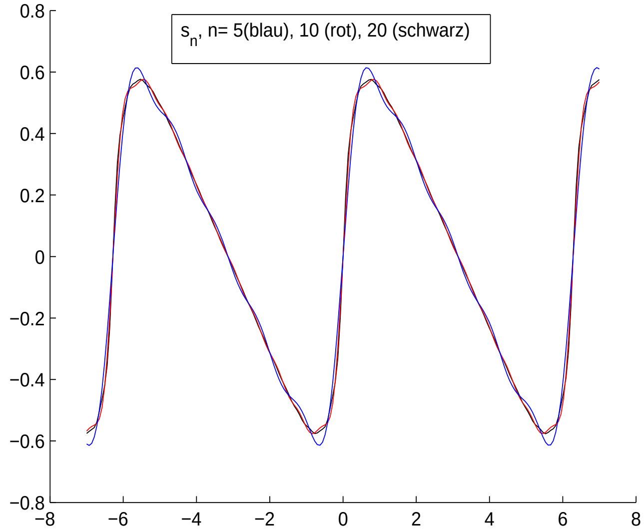
$$\left\| \frac{\sin(kx)}{k^2+1} \right\|_\infty \le \left| \frac{1}{k^2+1} \right| < \frac{1}{k^2}$$

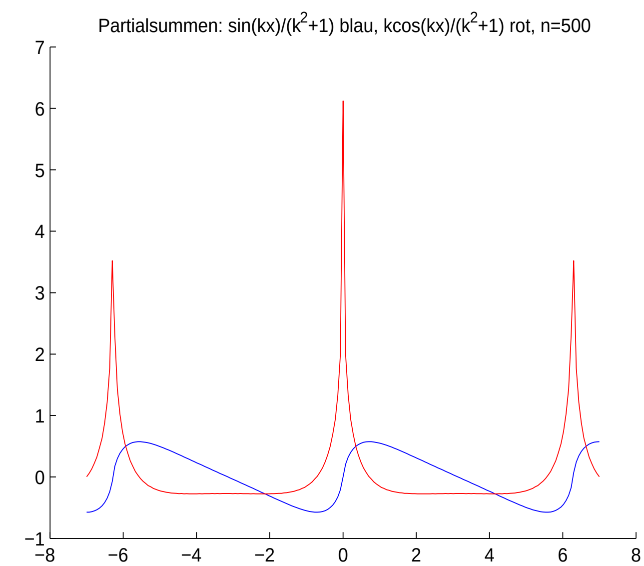
konvergiert die Reihe gleichmäßig und absolut (Majorantenkriterium von Weierstraß).

c) $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad q_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin(kx)}{k^2+1}\right)' = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k\cos(kx)}{k^2+1}\right),$

$$q_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Die Folge der Funktionswerte divergiert für $x = 0$ oder allgemeiner $x = 2k\pi$. Es liegt weder gleichmäßige noch punktweise Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ vor.





Aufgabe 3:

Für welche reellen Zahlen x konvergieren folgende Reihen? Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius und untersuchen Sie die Randpunkte gesondert.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!}(x-1)^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot(x-10)^k}{4^k\cdot k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k k}(x+1)^k$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)!\cdot(x-3)^k$.

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= \lim_{k\to\infty}\frac{2k}{(k+1)!}\cdot\frac{(k+2)!}{2(k+1)}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}\cdot\frac{(k+2)}{1} = \infty = r.\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot(x-10)^k}{4^k\cdot k}$.

Für den Konvergenzradius r gilt:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{3\cdot(k+1)\cdot 4^{k+1}}{4^k\cdot k\cdot 3} = \lim_{k\to\infty} 4\cdot\frac{k+1}{k} = 4.$$

Im Randpunkt $x_1 = 6 = 10-4$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3\cdot(-4)^k}{4^k\cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(-1)^k}{k} = 3\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Wegen der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe, konvergiert die Potenzreihe im Punkt $x_1 = 6$.

Im Randpunkt $x_2 = 14 = 10+4$ erhält man dagegen mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^k}{4^k\cdot k} = 3\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

bis auf den Faktor 3 die divergente harmonische Reihe.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k k}(x+1)^k$.

Hier gilt $a_k = \begin{cases}\frac{1}{2^k} & k \text{ ungerade,}\\ 2^k & k \text{ gerade.}\end{cases}$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 2$$

und somit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 2 \qquad \text{und} \qquad r = \frac{1}{2}\,.$$

Für $-1 \pm \frac{1}{2}$ gilt für die Summanden mit geradem Index:

$$2^{(-1)^{2n}2n}\,(\pm\frac{1}{2})^{2n} = 1\,.$$

Die Summanden konvergieren nicht gegen Null, also konvergiert die Reihe nicht.

d)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k-1)!}{k!} = 0\,.$$

Die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt $x_0 = 3$.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen von $f(x) := \dfrac{3}{7-2x}$, berechnen Sie den Konvergenzradius und geben Sie an für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert. Der Entwicklungspunkt sei

i) $x_0 = 0\,,$ **ii)** $x_0 = 2\,.$

b) Gegeben ist die $g(x) := \dfrac{x^2+1}{9-x^2}$. Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklungen von g zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, geben Sie das Konvergenzintervall und das Taylorpolynom vierten Grade von g zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

Lösung:

a) (i)

$$f(x) = \frac{3}{7-2x} = 3 \cdot \frac{1}{7-2x} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{7}x} = \frac{3}{7} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^k x^k.$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt, konvergiert die Potenzreihe für
$-1 < \frac{2}{7}x < 1 \iff -\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2}\,.$

(ii)

$$f(x) = \frac{3}{7-2(x-2)-4} = \frac{3}{3-2(x-2)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}(x-2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k (x-2)^k.$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt, konvergiert die Potenzreihe für
$-1 < \frac{2}{3}(x-2) < 1 \iff 0.5 < x < 3.5\,.$

b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^2+1}{9-x^2} = (x^2+1) \cdot \frac{1}{9-x^2} = \frac{x^2+1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{9}} \\
&= \frac{x^2+1}{9} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k x^{2k} \qquad \forall x \in (-3,3) = \text{ Konvergenzintervall} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^{k+1}} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^{k+1}} x^{2k+2} = \frac{1}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^{k+1}} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^k} x^{2k} \\
&= \frac{1}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9^{k+1}} + \frac{1}{9^k}\right) x^{2k} = \frac{1}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{10}{9^{k+1}}\right) x^{2k}.
\end{aligned}$$

$$T_4(x) = \frac{1}{9} + \frac{10}{9^2}x^2 + \frac{10}{9^3}x^4\,.$$