Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1: Welche der folgenden Funktionen sind selbstabbildend auf ihrem Definitionsbereich? Welche der Funktionen sind kontrahierend auf ihrem Definitionsbereich?

$$f_1 : [-1,\, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) = x^2$$

$$f_2 : \left[-\frac{1}{3},\, 0\right] \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) = x^2$$

$$f_3 : \left[-\frac{1}{3},\, \frac{1}{3}\right] \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) = x^2$$

Lösung zur Aufgabe 1: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **selbstabbildend** auf D, wenn $f(D) \subset D$ gilt.
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **kontrahierend** auf D mit der **Kontraktionskonstante** $L < 1$, wenn für alle $x, y \in D$

$$|\, f(x) - f(y)\,| \;\leq\; L \cdot |x - y|$$

gilt.

Falls f eine C^1 Funktion ist, liefert der Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f'(\alpha)|\,|x-y| \quad \text{mit einem } \alpha \in]x,y[\\ &\leq \max\{|f'(z)| : z \in D\} \cdot |x-y| \qquad \forall x, y \in D \end{aligned}$$

f_1 ist selbstabbildend auf $[-1,\, 1]$. Es gilt aber zum Beispiel:

$|f_1(1) - f_1(\frac{1}{2})| = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 1 - \frac{1}{2}$.

f_1 ist also nicht kontrahierend auf $[-1,\, 1]$.

f_2 ist nicht selbstabbildend auf $\left[-\frac{1}{3},\, 0\right]$. Denn es ist zum Beispiel $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \notin \left[-\frac{1}{3},\, 0\right]$.

f_2 und f_3 sind kontrahierend auf ihren Definitionsbereichen, denn es gilt

$|f_2'(x)| = |f_3'(x)| = |2x| \leq \frac{2}{3},.$

f_3 ist auch selbstabbildend auf $\left[-\frac{1}{3},\, \frac{1}{3}\right]$. Es gilt $f_3(x) = x^2 \in [0, 1/9]$, $\forall\, x \in [-1/3, 1/3]$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$f : I := \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos(x)}{2}\,.$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f'' von f.

b) Ist f auf I kovex oder konkav?

c) Zeigen Sie, dass f' auf I monoton steigend ist.

d) Zeigen Sie, dass f auf I kontrahierend ist.

e) In welchen Punkten aus I werden die globalen Extrema von f angenommen?

f) Zeigen Sie, dass f selbstabbildend auf I ist.

g) Wie viele Lösungen der Gleichung

$$g(x) = x - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(x)}{2} = 0$$

gibt es auf dem Intervall I?

Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \qquad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$

Lösung zur Aufgabe 2:

a) $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)}{2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\,.$

b) Wegen $f''(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x)) \geq 0$ ist f konvex.

c) Wegen $f''(x) \geq 0$ ist f' monoton steigend.

d) Da f' monoton steigend ist, wird $|f'|$ an einem der Randpunkte des Intervalls maximal. Es gilt $f'(0) = 0$ und

$f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \sin(\frac{\pi}{3})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3.14...}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Wegen $0.5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ gilt $0 < f'(\frac{\pi}{3}) < \frac{1}{2}\,.$

f ist also kontrahierend auf I.

e) Nach d) ist f' positiv in $(0, \frac{\pi}{3}]$, also f streng monoton steigend. Die Extrema können nur in den Randpunkten des Intervalls angenommen werden. Wir erhalten das globale strenge Minimum

$f(0) = \frac{\cos(0)}{2} = 0.5 \in I\,,$

und das globale, strenge Maximum:

$$0 < f(\tfrac{\pi}{3}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{36}\,.$$

f) Aus e) folgt $\forall x \in I$:

$0.5 \leq f(x) \leq f(\frac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi^2}{36} < \dfrac{1}{4} + \dfrac{16}{36} = \dfrac{25}{36} < 1 < \frac{\pi}{3}$.

Also $f(I) \subset I$.

g) Die Gleichung $g(x) = x - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(x)}{2} = 0$ kann in die Fixpunktaufgabe

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos(x)}{2} = x$$

umgeschrieben werden. Da f auf I die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, existiert genau eine Lösung der Gleichung in I .

Aufgabe 3: Zur Nullstellenbestimmung der Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ mit

$$f(x) = \ln(6x) + 2x^2,$$

soll ein Fixpunktverfahren herangezogen werden.

a) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle x^* besitzt. Tipp: Zwischenwertsatz und Satz von Rolle.

b) Leiten Sie aus der Gleichung $f(x) = 0$ die Fixpunkt- Aufgabe

$$x = \phi(x) = \frac{1}{6}\exp(-2x^2), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

her und zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 \geq 0$ der erste Iterationsschritt der Iteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = \frac{1}{6}\exp(-2x_k^2), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

eine Zahl $x_1 \in [0, \frac{1}{6}] =: I$ liefert.

c) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für die obige Funktion $\phi(x) := \frac{1}{6}\exp(-2x^2)$ auf dem Intervall I.

d) Führen Sie für den Startwert $x_0 = 0$ eine A-priori-Fehlerabschätzung durch und berechnen Sie eine Iterationszahl n, so dass sicher $|x_n - x^*| \leq 0.01$ gilt.

Lösungsskizze:

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Zwischenwertsatz $\Longrightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle.
Für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 4x > 0\,.$$

f' hat also keine und Nullstelle in $(0, \infty)$. Nach dem Satz von Rolle hat f höchstens eine Nullstelle in $\mathbb{R}^+$.

Insgesamt folgt also, dass f genau eine Nullstelle in $\mathbb{R}^+$ hat.

b) Es gilt

$$\ln(6x) + 2x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x = \exp(-2x^2) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{6}\exp(-2x^2) =: \Phi(x)$$

Für jeden Startwert $x_0 \geq 0$ gilt

$0 \leq x_1 = \phi(x_0) = \frac{1}{6}\exp(-2x_0^2) \leq \frac{1}{6}\,.$

c) Überprüfung der Selbstabbildungseigenschaft auf $I = [0, \frac{1}{6}]$:

Nach Teil b) gilt für $x_k \in \mathbb{R}^+$ stets $\phi(x_k) \in I$. Insbesondere also auch $\phi : I \to I$.

Überprüfung der Kontraktionsseigenschaft:

$$\Phi'(x) = -\frac{2}{3} x \exp(-2x^2)$$

Es gilt $|\Phi'(x)| \leq \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{6} = \frac{1}{9} =: L$ für alle $x \in I$.

Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt. Die Iterationsfolge (x_k) konvergiert daher gegen x^*.

d) Es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| = \frac{9}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n \left|\frac{1}{6} - 0\right| = \frac{3}{16} \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Für $n \geq 2$ erhalten wir also

$$|x_2 - x^*| \leq \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{16 \cdot 27} < \frac{1}{16 \cdot 25} = \frac{1}{400} < \frac{1}{100}.$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) \;=\; \frac{\frac{1}{2}x^2 - 10x + 1}{2x+1}\,.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$. Berechnen Sie wenn möglich eine Asymptote der Form $g(x) = ax + b$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f, und bestimmen Sie die Extrema von f.

e) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f. Bestimmen Sie dazu die Wendepunkte und untersuchen Sie, wo f konvex bzw. konkav ist.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$.

h) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) die Graphen von f und gegebenenfalls der Asymptote g für $x \in [-10; 10]$ in einem Bild.

Lösung:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

b) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{2}x - 10 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \pm\infty\,.$$

Wenn es eine Asymptote der vorgegebenen Form gibt, dann gilt:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{4}\,.$$

und

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 10x + 1}{2x+1} - \frac{x}{4}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 40x + 4 - 2x^2 - x}{4(2x+1)} = \frac{-41}{8}\,.$$

$g(x) = \frac{x}{4} - \frac{41}{8}$ ist die Asymptote zu f.

c) $$\lim_{x\to -\frac{1}{2}\pm} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 10x + 1}{2x+1} = \pm\infty\,.$$

Es liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor.

d) $f'(x) = \dfrac{(x-10)(2x+1) - 2(\frac{1}{2}x^2 - 10x + 1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{x^2+x-12}{(2x+1)^2}.$

$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 12 = 0 \iff x = -4 \vee x = 3\,.$

f kann das Monotonieverhalten nur in $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 3$ ändern.

Man kann zum Beispiel folgende Vorzeichen klären:

$f'(-5) = \frac{8}{(...)^2} > 0\,,$

$f'(-1) = \frac{-12}{(...)^2} < 0\,,$

$f'(0) = \frac{-12}{(...)^2} < 0\,,$

$f'(4) = \frac{8}{(...)^2} > 0\,,$

und daraus schliessen:

x	$\to -\infty$	$\in (-\infty, -4)$	-4	$\in (-4, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\in (-\frac{1}{2}, 3)$	3	$\in (3, \infty)$	$\to \infty$
$f'(x)$	–	positiv	0	negativ	–	negativ	0	positiv	–
$f(x)$	$\to -\infty$	steigt	-7 lokales Max.	fällt	$\mp\infty$ Pol $-,+$	fällt	$\frac{-24.5}{7}$ lokales Min.	steigt	– $\to \infty$

Wegen des Pols mit Vorzeichenwechsel und dem Verhalten im Unendlichen gibt es keine globalen Extrema.

e) Für $x \neq -\frac{1}{2}$ gilt:

$$f''(x) = \frac{(2x+1)(2x+1)^2 - 2(2x+1)\cdot 2\cdot (x^2+x-12)}{(2x+1)^4} = \frac{4x^2+4x+1-(4x^2+4x-48)}{(2x+1)^3}.$$

$$= \frac{49}{(2x+1)^3} \begin{cases} < 0 & x < -\frac{1}{2} \\ > 0 & x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

f ist konkav in $I_1 := (-\infty, -\frac{1}{2})$ und konvex in $I_2 := (-\frac{1}{2}, \infty)\,.$

Es gibt keine Wendepunkte.

f) Die bereits durchgeführten Rechnungen zeigen, dass f auf I_1 alle Werte aus $(-\infty, -7]$ annimmt und auf I_2 alle Werte aus $[\frac{-49}{14}, \infty)$. Also

$f(D) = \mathbb{R}\backslash\,]-7, -\frac{49}{14}[\,.$

g) Nullstellen:

$f(x) = 0 \iff x^2 - 20x + 2 = 0\,.$

$(x-10)^2 - 98 = 0 \iff x_{4,5} = 10 \pm \sqrt{98}\,.$

Abgabe: vom 27.04 bis 01.05.2020

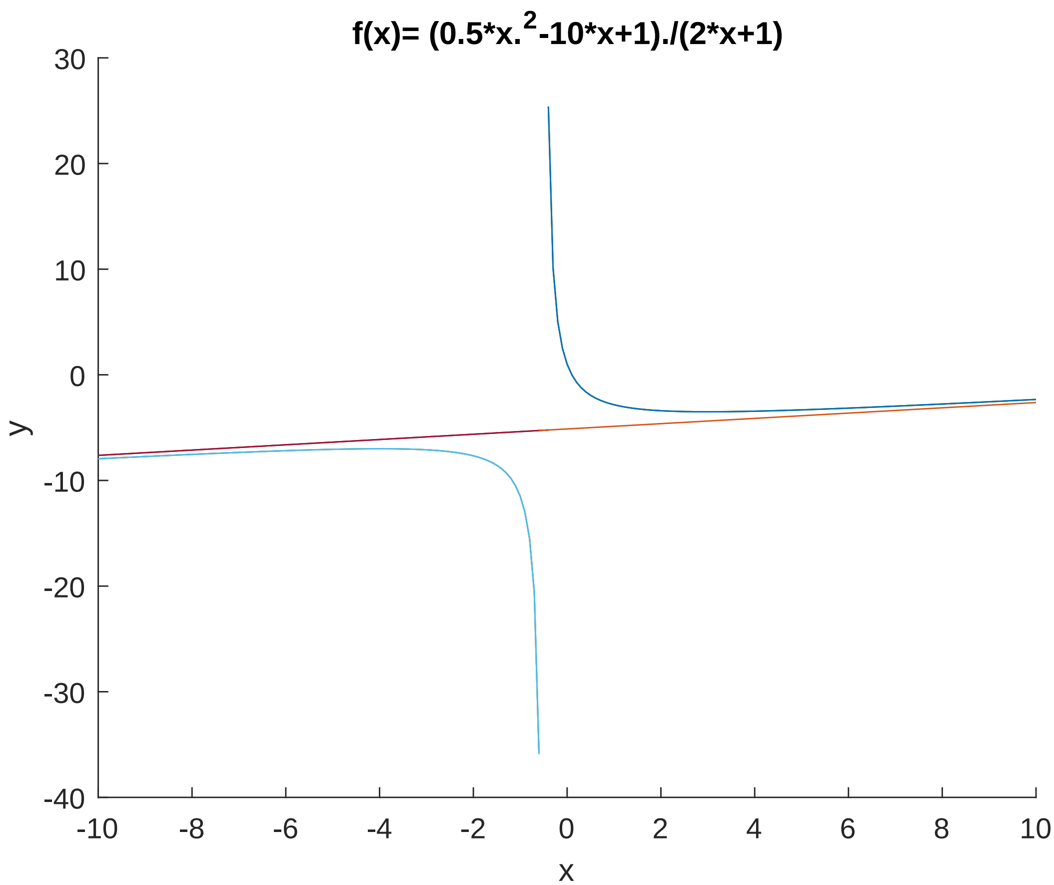

Abbildung 1: Skizze