

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1: (5 + 3 + 4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

a) $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2 - 7x + 12} dx$, Tipp: Partialbruchzerlegung.

b) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$, Tipp: Partielle Integration.

c) $\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{|x^4 - 16|}} dx$, Tipp: Substitution.

Aufgabe 2: (4+2+3 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass das uneigentliche Integral

$$\int_3^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^4 + x^2 + 2}} dx$$

für $\alpha = 0$ konvergiert und für $\alpha = 1$ divergiert.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, ohne sie zu berechnen:

(i) $\int_0^1 \frac{(x+2)\sqrt{x+1}}{5x-3x^2} dx$,

(ii) $\int_2^{\infty} \frac{(x+1)\sqrt{x+2x^3}}{2x(2-x^4)} dx$,

Aufgabe 3: (7+3 Punkte)

a) $L(f)(s) := F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ heißt Laplacetransformierte von der Funktion f .

Die Laplace-Transformation wird unter anderem zur Lösung von Differentialgleichungen verwendet. Sie ist für hinreichend glatte, für $t \rightarrow \infty$ höchstens exponentiell wachsende (d.h. $\exists \sigma, M \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad \forall t > 0$) Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : t \mapsto f(t)$ definiert. Genaueres im dritten Semester.

Leiten Sie Formeln für $F'(s)$ (vgl. Vorlesung), $F''(s)$ und $F'''(s)$ her, die keine Ableitungssymbole mehr enthalten, also kein $\frac{d}{ds}$, $\frac{\partial}{\partial s}$, ' oder Ähnliches. Versuchen Sie eine Formel für $F^{(n)}(s)$ aufzustellen, und beweisen Sie diese mittels Induktion.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Für welche $s \in \mathbb{R}$ existiert die Laplacetransformierte der Funktion $f(t) = e^{at}$, also das parameterabhängige uneigentliche Integral

$$F(s) := \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt,$$

Aufgabe 4: (2+4 Punkte)

Es sei K der Rotationskörper, der bei der Drehung des Funktionsgraphen von $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ um die x -Achse entsteht.

- Berechnen Sie das Volumen von K .
- Berechnen Sie die Mantelfläche von K .

Abgabe bis 17.07.2020, 17 Uhr.