Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}\,,\quad f(x)=\frac{1}{x+1}\,.$

$A=$ sei der Flächeninhalt des Flächenstücks $\left\{(x,y)\,\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le x\le 1,\,0\le y\le \frac{1}{x+1}\right\}.$

Also $A=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx\,.$

Für $n\in\mathbb{N}$ definieren wir die Zerlegung

$$Z_n:=\left\{x_{kn}:=\frac{k}{n}\,,\,k=0,1,2,\cdots,n\right\}\,.$$

$O_f(Z_n)$ und $U_f(Z_n)$ seien, wie in der Vorlesung definiert, die Obersumme und die Untersumme von f zur Zerlegung Z_n.

a) Berechnen Sie $O_f(Z_4)$ und $U_f(Z_4)$. Wie groß ist der absolute Fehler höchstens, wenn man $\dfrac{O_f(Z_4)+U_f(Z_4)}{2}$ als Näherung für A verwendet?

b) Geben Sie ein $n\in\mathbb{N}$ an, so dass die folgende Ungleichung gilt:

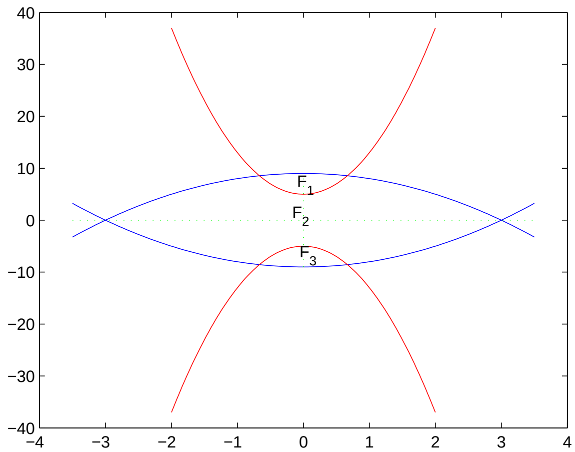
$$\left|\frac{O_f(Z_n)+U_f(Z_n)}{2}-A\right|\le\frac{1}{200}\,.$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Gegeben ist $$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 - 9 \le y \le 9 - x^2 \, .\}$$

im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Die Parabeln $p_1(x) = 8x^2 + 5$ und $p_2(x) = -8x^2 - 5$ zerlegen F in drei disjunkte Teile F_1, F_2 und F_3. Berechnen Sie die Flächeninhalte von F_1, F_2 und F_3.



Aufgabe 3: (3+4+5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $$\int_0^1 \frac{x^4 + 4x^2 + 5}{x^2 + 1} \, dx \, .$$

Hinweis: Polynomdivision und Tabelle aus den Seiten 82/83 der Vorlesung!

b) $$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x} + 2 + e^{\frac{x}{2}}}{e^x} \, dx \, .$$

Hinweis: Linearität und Tabelle aus den Seiten 82/83 der Vorlesung!

c) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left((x^4 + 2x^2 + 3) \sin(x) + \frac{4x + 5}{x^2 - 1} \right) dx \, .$$

Hinweis: Linearität, Symmetrie und Tabelle aus den Seiten 82/83 der Vorlesung!

Aufgabe 4: (8 + 6 Punkte)
Fehlerabschätzungen: Kür, etwas anspruchsvoller

Die Funktion $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ wird Integralsinus genannt.

Der Integrand ist stetig fortsetzbar nach 0 mit $Si(0) = 0$, daher lokal integrierbar in $[0, \infty)$.

Bemerkung: Der Integralsinus wird in der Signalverarbeitung benötigt, um die Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters zu beschreiben. Mit Hilfe von $Si(\infty)$ bestimmt man die Einschwingzeit. Ein idealer Tiefpassfilter ist ein Filter, der alle Frequenzanteile unterhalb einer Bandbreite B durchläßt und alle Frequenzanteile oberhalb der Bandbreite B blockiert.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe (Potenzreihe) der Funktion $Si(x)$ mit $x_0 = 0$, sowie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; 0)$ zu Si. Verwenden Sie bei Bedarf stetige Ergänzungen der auftretenden Funktionen.

   Hinweise: Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, Potenzreihe von $Si'(x)$.

b) Berechnen Sie $T_3(0.25; 0)$ und schätzen Sie den absoluten Fehler $|Si(0.25) - T_3(0.25; 0)|$ ab.

   Hinweis für die Fehlerabschätzung: Leibniz-Reihe aus Analysis I.

c) Es seien folgende Werte der Funktion $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ bekannt.

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$Si(x)$	0.000000	0.19955609	0.39646146	0.58812881

   Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Interpolationspolynoms p_n einen Näherungswert für $Si(0.25)$ mit einem theoretisch abgesicherten absoluten Fehler $|f(0.25) - p_n(0.25)|$ von maximal 0.002 und einem relativen Fehler $\frac{|f(0.25)-p_n(0.25)|}{|f(0.25)|}$ von maximal 1% .

   Hinweise: Es müssen nicht alle Daten verwendet werden.
   Es gilt $|Si''(x)| < 0.4, \forall x \in [0, 1]$.

Abgabe bis: 19.06.2020, 17 Uhr