Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1: (3 + 7 Punkte)

a) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2 - x^2 - 2\cos(x)}{3x^4} & \text{für } x \neq 0\,, \\ -\dfrac{1}{36} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

b) Bestimmen Sie für die Funktion $g(x) = \dfrac{x(6\sin(x) + x^3)}{2 - \cos(2x)}$ das Taylorpolynom $T_5(x; x_0)$ fünften Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 2: (6 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen folgender Funktionen zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2 - x}\right)^3, \qquad -2 < x < 2\,,$

b) $g(x) = \dfrac{e^x}{1 - x^2}, \qquad -1 < x < 1\,.$

Aufgabe 3: (9 + 4 Punkte)

a) (Leicht geänderte Aufgabe aus Klausur 2006, Struckmeier/Kiani)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion $f(x) = x\cos(x)$ zu den folgenden Daten:

x_k	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$
$f(x_k)$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$

Berechnen Sie $p_2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ und zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler die folgende Ungleichung gilt:

$$\left|p_2\left(\frac{\pi}{5}\right) - f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| < \frac{32\pi^4}{10000}\,.$$

b) Zu berechnen sei eine Formel für $Q(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2$. Aus Analysis I erinnern Sie sich gerade noch daran, dass man die Summe als ein Polynom dritten oder vierten Grades in n darstellen kann. Leider ist Ihnen die genaue Formel entfallen. Sie haben weder Internet noch ein hilfreiches Buch zur Hand. Leiten Sie die Formel mit Hilfe der polynomialen Interpolation her.

Tipp: Sie können $Q(n)$ für kleine n sicher auch ohne Hilfsmittel berechnen. Das Polynom muss für diese kleinen n natürlich auch das richtige Ergebnis liefern.

Aufgabe 4: (7 + 5 Punkte)

a) Es sei Ihnen die folgende Wertetabelle vorgelegt:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\sin(x)$	0.000000	0.099833	0.198669	0.295520	0.389418	0.479426

Berechnen Sie unter Verwendung eines Interpolationspolynoms möglichst niedrigen Grades eine Näherung für den Wert von $\sin(0.25)$ mit einem gesicherten absoluten Fehler von höchstens 10^{-4} . Dabei gehen Sie bitte davon aus, dass Ihr Taschenrechner zwar die elementaren Operationen $+, -, *, /$ durchführen kann, aber die $\sin, \cos,$ etc. Tasten ausgefallen sind. Gehen Sie bei der Fehlerabschätzung davon aus, dass die Tabellenwerte exakt sind.

b) (Kür: etwas schwieriger!)

Es sollen nun Werte der Sinusfunktion zu äquidistanten Stützstellen $x_k := k \cdot h$, $k = 0, \cdots, 1/h$ so tabelliert werden, dass aus der Tabelle für alle $x \in [0, 1]$ durch lineare Interpolation Näherungen für $\sin(x)$ bestimmt werden können, deren Fehler nicht größer als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ ausfällt. Gehen Sie wieder davon aus, dass die Tabellenwerte exakt sind.

Bestimmen Sie eine Schrittweite h, so dass der Interpolationsfehler kleiner als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ wird.

Abgabe bis: 29.05.2020, 17 Uhr