Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

a) $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sin(nx)\,,$

b) $g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right)\,,$

c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) := x\left(1 + \frac{1}{n}\right)\,,$

d) $q_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad q_n(x) := \dfrac{x^n}{1 + 2x^n}\,.$

Hinweis zu b) $|\sin(x)| \leq |x|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^k\,.$

Tipp: $\forall a \in]-1,1[: \ \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\,.$

b) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad h_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2 + 1}\,.$

Tipp: Majorantenkriterium von Weierstraß.

c) $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad q_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin(kx)}{k^2 + 1}\right)'\,.$

Aufgabe 3:

Für welche reellen Zahlen x konvergieren folgende Reihen? Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius und untersuchen Sie die Randpunkte gesondert.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!} (x-1)^k\,, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (x-10)^k}{4^k \cdot k}\,,$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k k} (x+1)^k\,, \qquad \text{d)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! \cdot (x-3)^k\,.$$

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen von $f(x) := \dfrac{3}{7-2x}$, berechnen Sie den Konvergenzradius und geben Sie an für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert. Der Entwicklungspunkt sei

$$\textbf{i)} \quad x_0 = 0\,, \qquad \textbf{ii)} \quad x_0 = 2\,.$$

b) Gegeben ist die $g(x) := \dfrac{x^2+1}{9-x^2}$. Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklungen von g zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, geben Sie das Konvergenzintervall und das Taylorpolynom vierten Grade von g zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

Abgabe: bis 15.05.2020, 17 Uhr.