**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

# Analysis II
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 1

**Aufgabe 1:** Welche der folgenden Funktionen sind selbstabbildend auf ihrem Definitionsbereich? Welche der Funktionen sind kontrahierend auf ihrem Definitionsbereich?

$$f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) = x^2$$

$$f_2 : \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) = x^2$$

$$f_3 : \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) = x^2$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist die Funktion

$f : I := \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos(x)}{2}\,.$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen $f'$ und $f''$ von $f$.

b) Ist $f$ auf $I$ kovex oder konkav?

c) Zeigen Sie, dass $f'$ auf $I$ monoton steigend ist.

d) Zeigen Sie, dass $f$ auf $I$ kontrahierend ist.

e) In welchen Punkten aus $I$ werden die globalen Extrema von $f$ angenommen?

f) Zeigen Sie, dass $f$ selbstabbildend auf $I$ ist.

g) Wie viele Lösungen der Gleichung

$$g(x) = x - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(x)}{2} = 0$$

gibt es auf dem Intervall $I$?

Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\,, \qquad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$

**Aufgabe 3:** Zur Nullstellenbestimmung der Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ mit

$$f(x) = \ln(6x) + 2x^2,$$

soll ein Fixpunktverfahren herangezogen werden.

a) Zeigen Sie, dass $f$ genau eine Nullstelle $x^*$ besitzt. Tipp: Zwischenwertsatz und Satz von Rolle.

b) Leiten Sie aus der Gleichung $f(x) = 0$ die Fixpunkt- Aufgabe

$$x = \phi(x) = \frac{1}{6}\exp(-2x^2),$$

her und zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 \geq 0$ der erste Iterationsschritt der Iteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = \frac{1}{6}\exp(-2x_k^2), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

eine Zahl $x_1 \in [0, \frac{1}{6}] =: I$ liefert.

c) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für die obige Funktion $\phi(x) := \frac{1}{6}\exp(-2x^2)$ auf dem Intervall $I$.

d) Führen Sie für den Startwert $x_0 = 0$ eine A-priori-Fehlerabschätzung durch und berechnen Sie eine Iterationszahl $n$, so dass sicher $|x_n - x^*| \leq 0.01$ gilt.

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei die Rechenvorschrift $$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 10x + 1}{2x + 1}.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D$ von $f$ in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f$ für $x \to \pm\infty$. Berechnen Sie wenn möglich eine Asymptote der Form $g(x) = ax + b$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f$ an den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $f$, und bestimmen Sie die Extrema von $f$.

e) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von $f$. Bestimmen Sie dazu die Wendepunkte und untersuchen Sie, wo $f$ konvex bzw. konkav ist.

f) Geben Sie das Bild von $D$ unter $f$ an (Wertebereich).

g) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$.

h) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) die Graphen von $f$ und gegebenenfalls der Asymptote $g$ für $x \in [-10; 10]$ in einem Bild.

**Abgabe:** vom 27.04 bis 01.05.2020