Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Hörsaalübung 7, Analysis II

SoSe 2020, 20./21. Juli

Kurvenintegrale (1. Art), Forier-Reihen

HINWEISE:

- **Klausurberatungen:**
  Werden in der letzten Vorlesungswoche ins Netz gestellt, unter

  Analysis I: https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/index.html#a1-1920

  Analysis II: https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/20/lm.html

- **Sprechstunden in der Vorlesungsfreienzeit:** Werden in Kürze aktualisiert

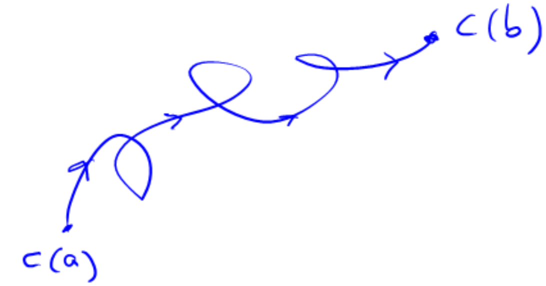
  http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/contact/sprechstunden.html

- **Umfrage:** Bitte helfen Sie uns Mathe III in Ihrem Sinne zu planen und nehmen Sie sich 2 Minuten Zeit für eine Umfrage:

  https://www.limesurvey.uni-hamburg.de/index.php/533487?lang=de

Kurven und Bogenlängen

Zum Beispiel: Bahn eines Teilchens. Ort $\mathbf{x}(t)$ des Teilchens zum Zeitpunkt $t \in [a, b]$:



$$\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

Geschwindigkeit: $\dot{\mathbf{c}} : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \dot{c}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$

Definition: Eine **stetige** Funktion

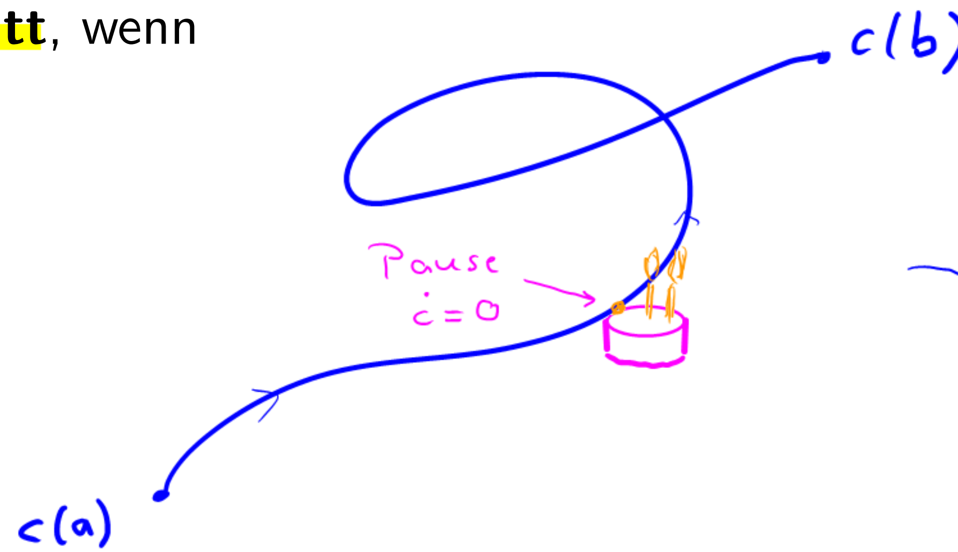
$$\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

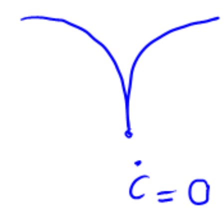
heißt **(Parameterdarstellung einer) Kurve** im $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt $\mathbf{c}(a)$ und Endpunkt $\mathbf{c}(b)$. Die Kurve heißt geschlossen, wenn $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ gilt.

$\mathbf{c}$ heißt Stückweise C^1-Kurve, falls es eine Zerlegung von $[a,b]$ gibt, so dass jede Komponentenfunktion $c_i,\ i = 1, \cdots, n$ auf jedem Teilintervall der Zerlegung, stetig differenzierbar ist.

Eine C^1 Kurve heißt **glatt**, wenn

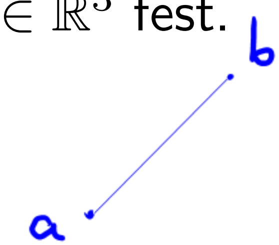
$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot c_1(t) \\ \dot c_2(t) \\ \vdots \\ \dot c_n(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



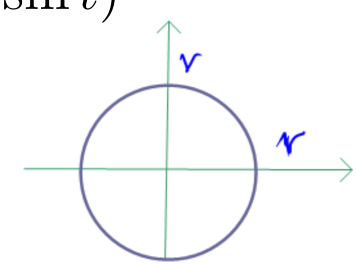


BEISPIELE:

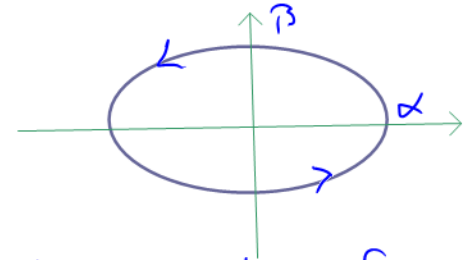
a) $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})^{\cancel{T}} \qquad \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ fest.
(geradlinige Verbindung von **a** und **b**)



b) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\sin t)^T$



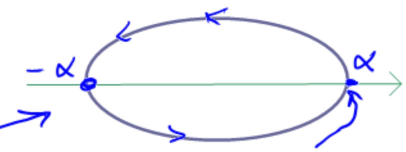
c) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos t,\ \beta \sin t)^T$



d) $\mathbf{c} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos t,\ \beta \sin t)^T$ zwei Durchläufe

e) $\mathbf{c} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos(2t),\ \beta \sin(2t))^T$

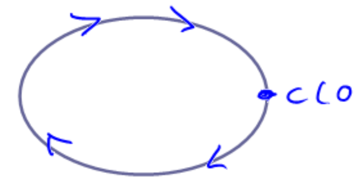
$c(\frac{\pi}{2}) = (\alpha\,(-1),\ \beta \cdot 0)^T$

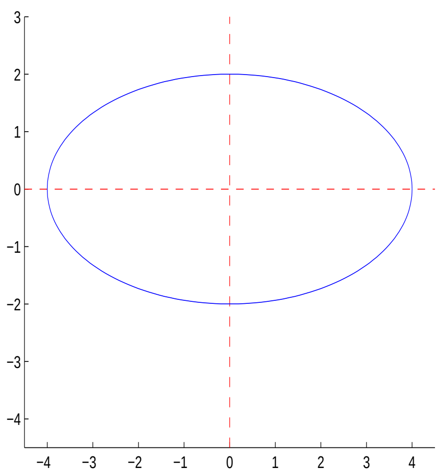


$c(\pi) = (\alpha \cdot 1, \beta \cdot 0)$

f) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos(-t),\ \beta \sin(-t))^T$

$c(\frac{\pi}{2}) = (\alpha \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}), \beta \sin(-\frac{\pi}{2})) = (0, -1 \cdot \beta)$





Die Skizze ist für c–f gleich, die Kurven nicht!

Geschwindigkeit, Umlaufsinn, Anzahl der Durchläufe

Vgl. c und e — Vgl. c und f — Vgl. c und d

g) $\mathbf{c} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (t^3,\, t^2)^T$ (Kuspe)

h) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (rt - a\sin t,\, r - a\cos t)^T$ (Zykloide)

i) $\mathbf{c} : [0, 12\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{c}(t) = (\overbrace{r\cos(t),\, r\sin(t)}^{\text{Kreis in } \binom{x}{y}\text{-Ebene}},\, t)^T$
(Schraubenlinie mit Radius r, Ganghöhe 2π und 6 Windungen)

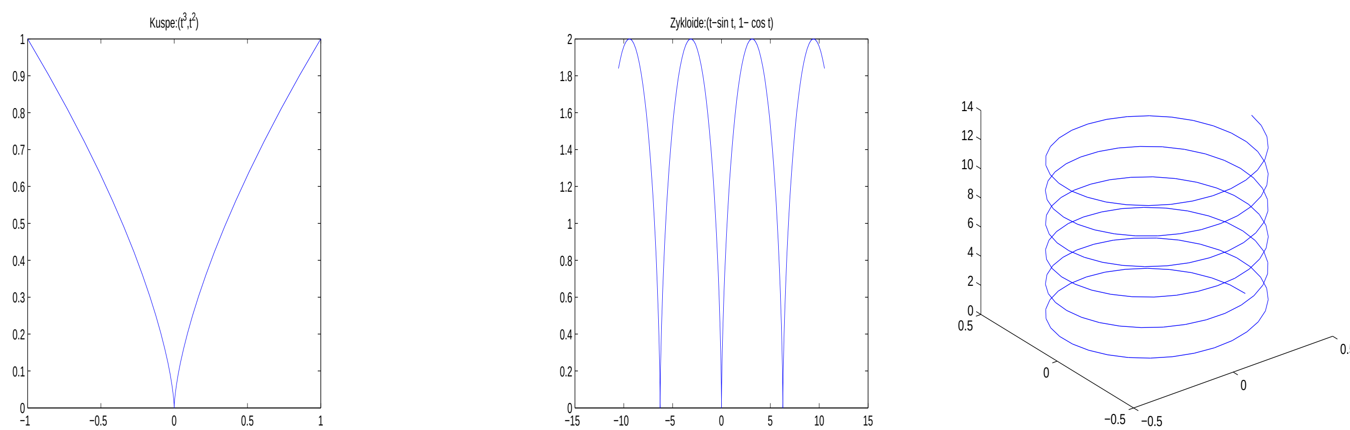
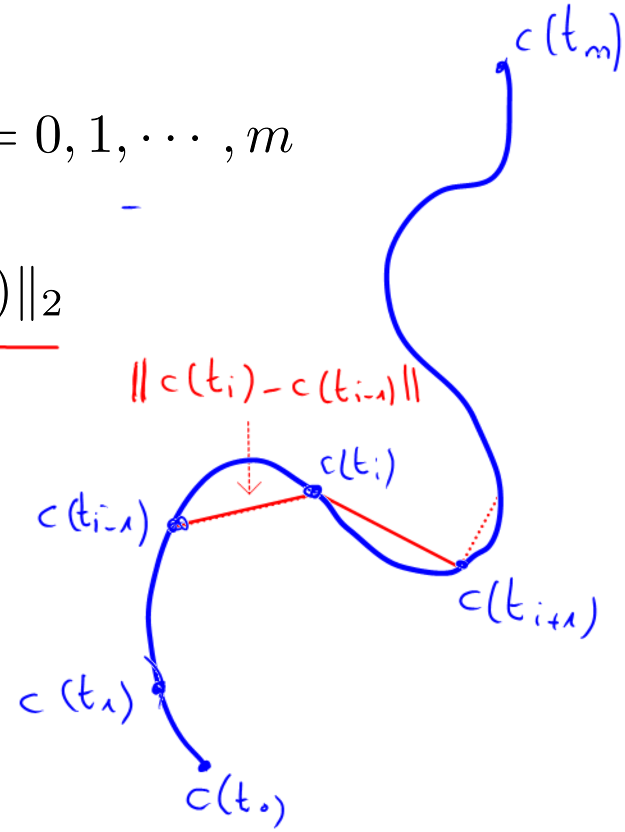


Abbildung 1: Kuspe, Zykloide, Schraubenlinie mit 6 Windungen

Kurvenlänge: $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$

Approximiere Kurve durch Polygonzug durch $\mathbf{c}(t_i)$, $i = 0, 1, \cdots, m$



Länge des Polygonzugs: $$l(Z) = \sum_{i=1}^{m} \underline{\|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|_2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\|c(t_i) - c(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

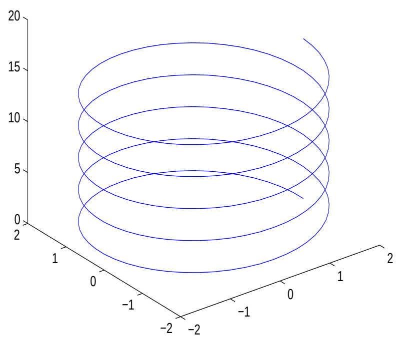
$$\int_a^b \qquad \|\dot{c}(t)\| \quad \cdot \quad dt$$

Für jede C^1 Kurve gilt unabhängig von der Parametrisierung

$$\boxed{L(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt \, .}$$

Beispiel 1: Länge von $\mathbf{c} : \underline{[0,5]} \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi t) \\ 2\sin(2\pi t) \\ \pi \cdot t \end{pmatrix} \implies \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 2\,(-\sin(2\pi t))\cdot 2\pi \\ 2\cdot\cos(2\pi t)\cdot 2\pi \\ \pi \end{pmatrix}$$



$$\|\dot{c}(t)\|_2 = \left(-4\pi\sin(2\pi t)\right)^2 + \left(4\pi\cos(2\pi t)\right)^2 + \pi^2$$

$$= 16\pi^2\sin^2(2\pi t) + 16\pi^2\cos^2(2\pi t) + \pi^2$$

$$= 16\pi^2\Big[\underbrace{\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)}_{1}\Big] + \pi^2 = 16\pi^2 + \pi^2$$

$$\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|^2 = 17\pi^2 \implies \dot{c}(t) = \sqrt{17\pi^2} = \sqrt{17}\cdot\pi$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b 1\cdot\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt = \int_0^5 \sqrt{17}\cdot\pi\,dt = \sqrt{17}\cdot\pi\cdot t\,\Big|_0^5 = \sqrt{17}\,\pi\,(5-0) = 5\sqrt{17}\,\pi$$

Sei $\mathbf{c} : [a,b] \to D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, Kurve und $f : D \to \mathbb{R}^{1}$ eine skalare Abbildung. Dann ist das

Kurvenintegral von f über $\mathbf{c}$ definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds := \int_{\mathbf{c}} f(x)\, ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\, \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt\,.$$

Beispiele:

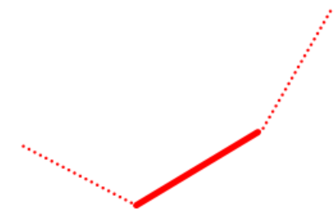
A) Länge: $f(\mathbf{c}(t)) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbf{c}} f\, ds =$ Länge der Kurve,

B) Masse: $f(\mathbf{c}(t)) = \rho(\mathbf{c}(t)) =$ Dichte (Masse pro Längeneinheit)

$$\Longrightarrow \quad M =: \int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t))\, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$=$ Masse der Kurve (z.B. Drahtstück).

Herleitung: Kurve $\approx$ Polygonzug,



Dichte auf $[\mathbf{c}(t_{i-1}), \mathbf{c}(t_i)] \approx \rho(c(t_i))$.

Das Stück $[\mathbf{c}(t_{i-1}), \mathbf{c}(t_i)]$ hat die

Masse: $M_i \approx \rho(\mathbf{c}(t_i))\, \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$.

Gesamtmasse: $M \approx \sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{i=1}^{m} \rho(\mathbf{c}(t_i))\, \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1}\|$

C) Schwerpunkt:

m Massepunkte in den Orten $\boldsymbol{x}^i = \mathbf{c}(t_i)$ mit den Massen m_i haben den Schwerpunkt

$$X_s := \left(\sum_{i=1}^{m} m_i\, \boldsymbol{x}^i \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{m} m_i \right)$$

Schwerpunkt eines Massebelegten Drahtes:
Approximiere wieder durch Polygonzug.

Konzentriere die Masse M_i im Punkt $\mathbf{c}(t_i)$

Dann hat man m Massepunkte und erhält

$$\mathbf{X}_s \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} M_i \mathbf{c}(t_i)}{M} \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} \rho(\mathbf{c}(t_i)) \, \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\| \mathbf{c}(t_i)}{M}$$

$$\mathbf{X}_s \approx \left(\sum_{i=1}^{m} M_i \mathbf{c}(t_i) \right) / M \longrightarrow \left(\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \, \mathbf{c}(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt \right) / M$$

Für den Schwerpunkt gilt also

$$\boxed{\mathbf{X}_s = \frac{\displaystyle\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \, \mathbf{c}(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt}{\displaystyle\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt} = \frac{\displaystyle\int_c \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathbf{x} ds}{\displaystyle\int_c \rho(\boldsymbol{x}) \, ds} =: X_s \, .}$$

wobei das Integral im Zähler komponentenweise ausgwertet wird (vgl. Bsp. 2).

Im $\mathbb{R}^3$ mit der Gesamtmasse M und $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$x_s = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t))\, c_1(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$y_s = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t))\, c_2(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$z_s = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t))\, c_3(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

D) Trägheitsmoment

Rotiert ein Massepunkt der Masse m im Abstand r mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse A, so gilt für die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \theta_A \omega^2$$

System von k Punkten: $\theta_A = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2$

Trägheitsmoment des massebelegten Drahtes

$$\boxed{\theta_A = \int_c \rho(\boldsymbol{x}) r^2(\boldsymbol{x})\, ds = \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t))(r(\mathbf{c}(t)))^2 \, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt.}$$

Beispiel 2) Durch

$c\,:\,[0, 10\ln(5)] \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) := e^{\frac{t}{10}}\,(\cos(t), \sin(t), 1)^T$

sei ein Stück Draht in der Form einer Schraubenlinie vorgegeben. Die Massendichte (Hier: Masse pro Länge) des Drahtes betrage

$\rho(\mathbf{c}(t)) := e^{-\frac{t}{5}}$.

Berechnen Sie die Länge des Drahtes, den Schwerpunkt des Drahtes und das Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse.

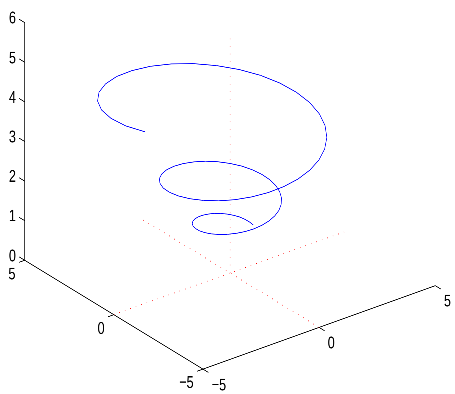


Abbildung 2: Schraubenlinie 2

a) Die Länge des Drahtes

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{10}} \cos(t) \\ e^{\frac{t}{10}} \sin(t) \\ e^{\frac{t}{10}} \cdot 1 \end{pmatrix} \implies \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \cos(t) \\ \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sin(t) \\ \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t) e^{\frac{t}{10}} \\ \cos(t) e^{\frac{t}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \begin{pmatrix} \cos(t) - 10\sin(t) \\ \sin(t) + 10\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sqrt{(\cos(t) - 10\sin(t))^2 + (\sin(t) + 10\cos(t))^2 + 1^2}$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{10\ln(5)} \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sqrt{102}\, dt = \sqrt{102}\, e^{\frac{t}{10}} \Big|_0^{10\ln(5)} = 4\sqrt{102}.$$

b) Der Schwerpunkt des Drahtes

$$
\begin{aligned}
Masse = M \ &= \int_0^{10\ln(5)} \rho(\mathbf{c}(t))\, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{10\ln(5)} \frac{e^{-\frac{t}{10}}}{10}\sqrt{102}dt \ = \ \frac{4}{5}\sqrt{102}\,.
\end{aligned}
$$

Schwerpunkt

$$
\begin{aligned}
M \cdot x_s &= \int_0^{10\ln(5)} \rho(\mathbf{c}(t))\, c_1(t)\, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{10\ln(5)} e^{-\frac{t}{5}}\, e^{\frac{t}{10}}\ \cos(t)\, \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10}\sqrt{102}dt \\
&= \int_0^{10\ln(5)} \frac{\sqrt{102}}{10}\ \cos(t)\, dt \ = \ \frac{\sqrt{102}}{10}\ \sin(10\ln(5)).
\end{aligned}
$$

Analog erhält man

$M \cdot y_s = \frac{\sqrt{102}}{10}\,(1 - \cos(10\ln(5))), \quad M \cdot z_s = \sqrt{102}\,\ln(5)$ und damit

$$X_s = (x_s, y_s, z_s)^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sin(10\ln(5)) \\ 1 - \cos(10\ln(5)) \\ 10\ln(5) \end{pmatrix}.$$

c) Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse

$r(t) = \sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2} =$

$$\theta_{z-Achse} = \int_0^{10\ln(5)} \rho(\mathbf{c}(t))\ (r(\mathbf{c}(t)))^2\,\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt$$

$$= \int_0^{10\ln(5)} e^{-\frac{t}{5}}\ \left(e^{\frac{t}{10}}\right)^2\ e^{\frac{t}{10}}\frac{\sqrt{102}}{10}dt\ = 4\sqrt{102}.$$

Beispiel 3) Gegeben seien die Kurve

$$c : [0; 6\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad c : t \longmapsto \left(4\cos(t)\,, 4\sin(t)\,, 3t\,\right)^T ,$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x, y, z) = x\,y\,z\,.$
Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs c .
Hinweis: $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Lösung:

$$\dot{c}(t) \;=\; \left(-4\sin(t)\,, 4\cos(t)\,, 3\,\right)^T ,$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + \;(4\cos(t))^2 \;+ 3^2} \;=$$

$$f(c(t)) = 4\sin(t)\cdot 4\cos(t)\cdot 3t \;=\; 48t\cdot\sin(t)\cos(t) = 24t\cdot\sin(2t)$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{6\pi} f(c(t))\cdot\|\dot{c}(t)\|\,dt &= \int_0^{6\pi} 24t\cdot\sin(2t)\cdot 5dt \\
&= 60\int_0^{6\pi} t\cdot 2\sin(2t)dt \\
&= 60\left[t(-\cos(2t))\right]_0^{6\pi} - 60\int_0^{6\pi}(-\cos(2t))dt \\
&=
\end{aligned}
$$

Approximation periodischer Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und **periodisch** mit der Periode $T > 0$, also $f(t+T) = f(t)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Definiere $\qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T} =$ Kreisfrequenz und

$$T_n := \left\{ g : g(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right), \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\} =$$

Raum aller $T-$periodischen **trigonometrischen Polynome vom Grad n** mit dem Skalarprodukt

$$< f, g > := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t)\, dt\,.$$

und der Norm

$$\|\, g\| := \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T (g(t))^2\, dt} = \sqrt{< g, g >}\,.$$

Die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t) : \ k \in \mathbb{N} \right\}$

bilden eine Orthonormalbasis von T_n.

$\Longrightarrow$ beste Approximation für f aus T_n ist

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

die sogenannte **abgeschnittene Fourierreihe von** f mit

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

$$\| f - f_n \| < \| f - g \| \quad \forall g \in T_n\,.$$

Praktische Besonderheiten:

f gerade : $b_k = 0,\ a_k = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad k \in \mathbb{N}_0$

f ungerade : $a_k = 0,\ b_k = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad k \in \mathbb{N}$

Weil zum Beispiel: $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T} f(t)\ \cos(k\omega t)\,dt\ = \dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \cos(k\omega t)\,dt$

Fourierreihe:

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \qquad \text{(reell)}$$

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{(komplex)}$$

Zusammenfassung der Formeln für Fourierkoeffizienten:

$$\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \tfrac{a_0}{2} & a_0 &= 2\gamma_0 \\ \gamma_k &= \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k) & a_k &= \gamma_k + \gamma_{-k} \\ \gamma_{-k} &= \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k) & b_k &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \end{aligned}$$

$F_f(t) \sim f(t)$

$$F_f(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2} \qquad \text{(also } = f(t) \text{ falls } f \text{ stetig in } t\text{)}$$

Fortsetzungen:

Periodische Fortsetzung von $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|$

Gerade 2π periodische Fortsetzung von $g : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ g(x) = x$

Ungerade π periodische Fortsetzung von $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\cos(x)$

BEISPIEL 1:) Gegeben sei

Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π–periodisch fortgesetzten Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|$.

die Funktion ist gerade. Es gilt $\boxed{\quad b_k = 0 \quad \forall k \in N\,. \quad}$

Mit $T = 2\pi$ also $\omega = \frac{2\pi}{T} =$ gilt

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Für $k = 0$ erhält man den Mittelwert

$a_0 =$

Also $\frac{a_0}{2} =$

und für $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x \cos(kx)\, dx =$$

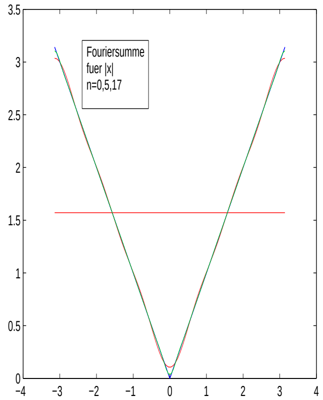
$$= \frac{4}{2\pi} \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}\, dx$$

$$=$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade,} \\ \frac{-4}{k^2\pi} & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourierreihe ist also gegeben durch

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2l-1)^2} \cos((2l-1)x)\,.$$



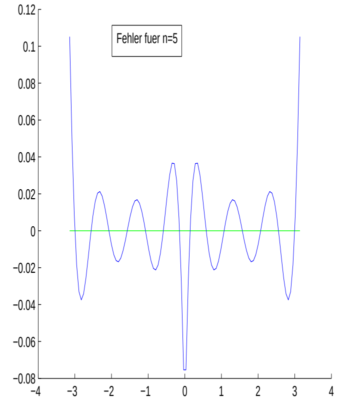


Abbildung 3: abgeschnittene Fourierreihen für $|x|$ n=0, 5, 17, Fehler für n=5

Es gilt $F_f(t) = \lim_{n \to infty} F_n(t) =$

BEISPIEL 2:) Gegeben sei

$h(t) = 2\cosh(3t) - 4$ auf dem Intervall $[0, 2]$

Gesucht: die reellen Fourierkoeffizienten der 2–periodischen Fortsetzung.

Integrale über Produkte von $\cosh$ mit $\sin$ bzw. $\cos$: nicht schön.

Andererseits: $\cosh(3t) = \dfrac{e^{3t} - e^{-3t}}{2}$

Für die komplexen Koeffizienten $\gamma_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T h(t) e^{-ik\omega t}\, dt$ und $h(t) = \cosh(3t)$ rechnet man :

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (e^{3t} - e^{-3t}) e^{-ik\pi t}\, dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 e^{(3-ik\pi)t} - e^{(-3-ik\pi)t}\, dt
\end{aligned}
$$

$$\gamma_k =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{(3-ik\pi)t}}{3-ik\pi} - \frac{e^{(-3-ik\pi)t}}{-3-ik\pi}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{(6-i2k\pi)}}{3-ik\pi} + \frac{e^{(-6-i2k\pi)}}{3+ik\pi}\right] \qquad e^{(\pm i2k\pi)} = 1$$

$$- \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3-ik\pi} + \frac{1}{3+ik\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{6}}{3-ik\pi} + \frac{e^{-6}}{3+ik\pi}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{3+ik\pi}{3^2-(ik\pi)^2} + \frac{3-ik\pi}{3^2-(ik\pi)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{6}(3+ik\pi) + e^{-6}(3-ik\pi)}{9+k^2\pi^2}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{6}{9+k^2\pi^2}\right]$$

$$\gamma_k = \frac{1}{4(9+k^2\pi^2)}(e^6(3+ik\pi)+e^{-6}(3-ik\pi)-6)$$

$$a_0 = 2\gamma_0 = \frac{2}{4\cdot 9}\left(e^6(3)+e^{-6}(3)-6\right) = \frac{1}{2\cdot 3}\left(e^6+e^{-6}-2\right) = \frac{1}{3}\left(\cosh(6)-1\right)$$

$$\begin{aligned} a_k = \gamma_k+\gamma_{-k} = & \frac{1}{4(9+k^2\pi^2)}\left(e^6(3+ik\pi)+e^{-6}(3-ik\pi)-6\right) \\ & + \frac{1}{4(9+k^2\pi^2)}\left(e^6(3-ik\pi)+e^{-6}(3+ik\pi)-6\right) \\ = & \frac{1}{4(9+k^2\pi^2)}\left(6e^6+6e^{-6}-12\right) = \frac{3\cosh(6)-3}{9+k^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k = i(\gamma_k-\gamma_{-k}) = & \frac{i}{4(9+k^2\pi^2)}\left(e^6(3+ik\pi)+e^{-6}(3-ik\pi)-6\right) \\ & - \frac{i}{4(9+k^2\pi^2)}\left(e^6(3-ik\pi)+e^{-6}(3+ik\pi)-6\right) \\ = & \frac{i}{4(9+k^2\pi^2)}\left(2\cdot ik\pi e^6-2\cdot ik\pi e^{-6}\right) \\ = & \frac{i^2k\pi}{2(9+k^2\pi^2)}\left(e^6-e^{-6}\right) = \frac{-k\pi}{9+k^2\pi^2}\sinh(6) \end{aligned}$$

Für $h(t) = 2\cosh(3t) - 4$ gilt dann mit

$\tilde{a}_0 = 2a_0 - 8,\ \tilde{a}_k = 2a_k,\ \tilde{b}_0 = 2b_k,\ \ k \neq 0$,

$\tilde{\gamma}_0 = 2\gamma_0 - 4,\ \tilde{\gamma}_k = 2\gamma_k,\ \ k \neq 0$:

$$h(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_k e^{ik\pi t} = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(k\pi t) + \tilde{b}_k \sin(k\pi t)$$