

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Hörsaalübung 7, Analysis II

SoSe 2020, 20./21. Juli

Kurvenintegrale (1. Art), Fourier-Reihen

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

HINWEISE:

- **Klausurberatungen:**

Werden in der letzten Vorlesungswoche ins Netz gestellt, unter

Analysis I: <https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/index.html#a1-1920>

Analysis II: <https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/20/lm.html>

- **Sprechstunden in der Vorlesungsfreizeit:** Werden in Kürze aktualisiert

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/contact/sprechstunden.html>

- **Umfrage:** Bitte helfen Sie uns Mathe III in Ihrem Sinne zu planen und nehmen Sie sich 2 Minuten Zeit für eine Umfrage:

<https://www.limesurvey.uni-hamburg.de/index.php/533487?lang=de>

Kurven und Bogenlängen

Zum Beispiel: Bahn eines Teilchens. Ort $\mathbf{x}(t)$ des Teilchens zum Zeitpunkt $t \in [a, b]$:

$$\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

$$\text{Geschwindigkeit: } \dot{\mathbf{c}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \dot{c}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

Definition: Eine **stetige** Funktion

$$\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt **(Parameterdarstellung einer) Kurve** im \mathbb{R}^n mit Anfangspunkt $\mathbf{c}(a)$ und Endpunkt $\mathbf{c}(b)$. Die Kurve heißt geschlossen, wenn $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ gilt.

\mathbf{c} heißt Stückweise C^1 -Kurve, falls es eine Zerlegung von $[a, b]$ gibt, so dass jede Komponentenfunktion $c_i, i = 1, \dots, n$ auf jedem Teilintervall der Zerlegung, stetig differenzierbar ist.

Eine C^1 Kurve heißt **glatt**, wenn

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

BEISPIELE:

a) $\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ fest.}$
(geradlinige Verbindung von \mathbf{a} und \mathbf{b})

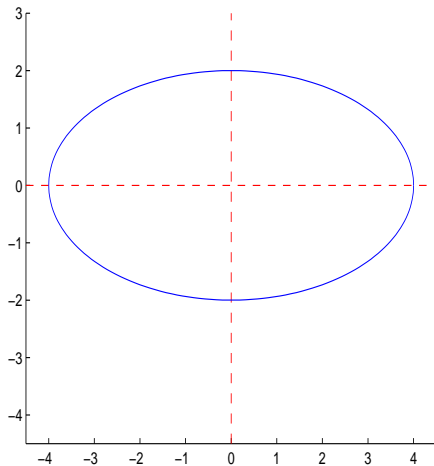
b) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$

c) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t)^T$

d) $\mathbf{c} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t)^T$

e) $\mathbf{c} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos(2t), \beta \sin(2t))^T$

f) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\alpha \cos(-t), \beta \sin(-t))^T$



Geschwindigkeit, Umlaufsinn, Anzahl der Durchläufe

g) $\mathbf{c} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2)^T$ (Kuspe)

h) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (rt - a \sin t, r - a \cos t)^T$ (Zykloide)

i) $\mathbf{c} : [0, 12\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c}(t) = (r \cos(t), r \sin(t), t)^T$
(Schraubenlinie mit Radius r , Ganghöhe 2π und 6 Windungen)

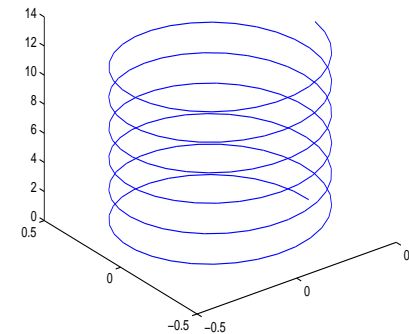
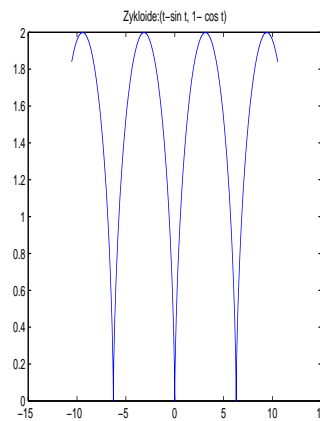
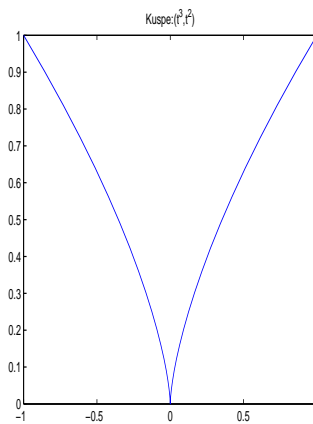


Abbildung 1: Kuspe, Zykloide, Schraubenlinie mit 6 Windungen

Kurvenlänge:

Approximiere Kurve durch Polygonzug durch $\mathbf{c}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$

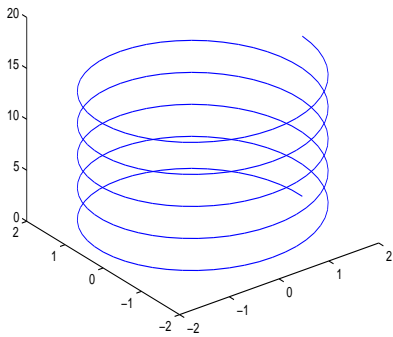
Länge des Polygonzugs: $l(Z) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|_2$

Für jede C^1 Kurve gilt unabhängig von der Parametrisierung

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt.$$

Beispiel 1: Länge von $\mathbf{c} : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} 2 \cos(2\pi t) \\ 2 \sin(2\pi t) \\ \pi \cdot t \end{pmatrix} \implies \dot{\mathbf{c}}(t) =$$



$$\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|^2 =$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

Sei $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, Kurve und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Abbildung. Dann ist das

Kurvenintegral von f über c definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f ds := \int_{\mathbf{c}} f(x) ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt .$$

Beispiele:

A) Länge: $f(\mathbf{c}(t)) = 1 \implies \int_{\mathbf{c}} f ds = \text{Länge der Kurve,}$

B) Masse: $f(\mathbf{c}(t)) = \rho(\mathbf{c}(t)) = \text{Dichte (Masse pro Längeneinheit)}$

$$\implies M =: \int_{\mathbf{c}} f ds = \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

= Masse der Kurve (z.B. Drahtstück).

Herleitung: Kurve \approx Polygonzug,

Dichte auf $[\mathbf{c}(t_{i-1}), \mathbf{c}(t_i)] \approx \rho(\mathbf{c}(t_i))$.

Das Stück $[\mathbf{c}(t_{i-1}), \mathbf{c}(t_i)]$ hat die

Masse: $M_i \approx \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$.

Gesamtmasse: $M \approx \sum_{i=1}^m M_i = \sum_{i=1}^m \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$

C) Schwerpunkt:

m Massepunkte in den Orten $\mathbf{x}^i = \mathbf{c}(t_i)$ mit den Massen m_i haben den Schwerpunkt

$$X_s := \left(\sum_{i=1}^m m_i \mathbf{x}^i \right) / \left(\sum_{i=1}^m m_i \right)$$

Schwerpunkt eines Massebelegten Drahtes:

Approximiere wieder durch Polygonzug.

Konzentriere die Masse M_i im Punkt $\mathbf{c}(t_i)$

Dann hat man m Massepunkte und erhält

$$\mathbf{X}_s \approx \frac{\sum_{i=1}^m M_i \mathbf{c}(t_i)}{M} \approx \frac{\sum_{i=1}^m \rho(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\| \mathbf{c}(t_i)}{M}$$

$$\mathbf{X}_s \approx \left(\sum_{i=1}^m M_i \mathbf{c}(t_i) \right) / M \longrightarrow \left(\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \mathbf{c}(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt \right) / M$$

Für den Schwerpunkt gilt also

$$\mathbf{X}_s = \frac{\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \mathbf{c}(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt}{\int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt} = \frac{\int_c \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} ds}{\int_c \rho(\mathbf{x}) ds} =: X_s.$$

wobei das Integral im Zähler komponentenweise ausgewertet wird (vgl. Bsp. 2).

Im \mathbb{R}^3 mit der Gesamtmasse M und $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$x_s = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) c_1(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$y_s = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) c_2(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$z_s = \frac{1}{M} \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) c_3(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

D) Trägheitsmoment

Rotiert ein Massepunkt der Masse m im Abstand r mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse A , so gilt für die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \theta_A \omega^2$$

System von k Punkten:
$$\theta_A = \sum_{i=1}^k m_i r_i^2$$

Trägheitsmoment des massebelegten Drahtes

$$\theta_A = \int_c \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) ds = \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t)) (r(\mathbf{c}(t)))^2 \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt.$$

Beispiel 2) Durch

$$c : [0, 10 \ln(5)] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) := e^{\frac{t}{10}} (\cos(t), \sin(t), 1)^T$$

sei ein Stück Draht in der Form einer Schraubenlinie vorgegeben. Die Massendichte (Hier: Masse pro Länge) des Drahtes betrage

$$\rho(\mathbf{c}(t)) := e^{-\frac{t}{5}}.$$

Berechnen Sie die Länge des Drahtes, den Schwerpunkt des Drahtes und das Trägheitsmoment bzgl. der z -Achse.

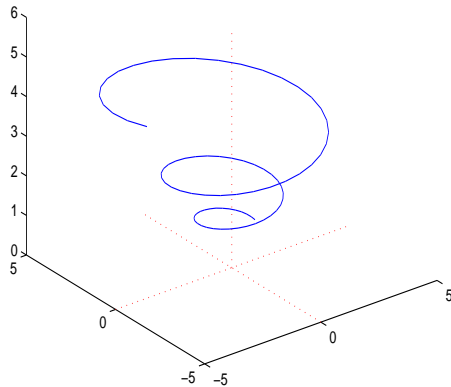


Abbildung 2: Schraubenlinie 2

a) Die Länge des Drahtes

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t) &= \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{10}} \cos(t) \\ e^{\frac{t}{10}} \sin(t) \\ e^{\frac{t}{10}} \cdot 1 \end{pmatrix} \implies \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \cos(t) \\ \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sin(t) \\ \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t)e^{\frac{t}{10}} \\ \cos(t)e^{\frac{t}{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \begin{pmatrix} \cos(t) - 10 \sin(t) \\ \sin(t) + 10 \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\ \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| &= \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sqrt{(\cos(t) - 10 \sin(t))^2 + (\sin(t) + 10 \cos(t))^2 + 1^2}\end{aligned}$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{10 \ln(5)} \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sqrt{102} dt = \sqrt{102} e^{\frac{t}{10}} \Big|_0^{10 \ln(5)} = 4\sqrt{102}.$$

b) Der Schwerpunkt des Drahtes

$$\begin{aligned} \text{Masse} = M &= \int_0^{10 \ln(5)} \rho(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt \\ &= \int_0^{10 \ln(5)} \frac{e^{-\frac{t}{10}}}{10} \sqrt{102} dt = \frac{4}{5} \sqrt{102}. \end{aligned}$$

Schwerpunkt

$$\begin{aligned} M \cdot x_s &= \int_0^{10 \ln(5)} \rho(\mathbf{c}(t)) c_1(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt \\ &= \int_0^{10 \ln(5)} e^{-\frac{t}{5}} e^{\frac{t}{10}} \cos(t) \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} \sqrt{102} dt \\ &= \int_0^{10 \ln(5)} \frac{\sqrt{102}}{10} \cos(t) dt = \frac{\sqrt{102}}{10} \sin(10 \ln(5)). \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$M \cdot y_s = \frac{\sqrt{102}}{10} (1 - \cos(10 \ln(5))), \quad M \cdot z_s = \sqrt{102} \ln(5) \text{ und damit}$$

$$X_s = (x_s, y_s, z_s)^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \sin(10 \ln(5)) \\ 1 - \cos(10 \ln(5)) \\ 10 \ln(5) \end{pmatrix}.$$

c) Trägheitsmoment bzgl. der z -Achse

$$r(t) = \sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2} =$$

$$\theta_{z\text{-Achse}} = \int_0^{10 \ln(5)} \rho(\mathbf{c}(t)) (r(\mathbf{c}(t)))^2 \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$$= \int_0^{10 \ln(5)} e^{-\frac{t}{5}} \left(e^{\frac{t}{10}}\right)^2 e^{\frac{t}{10}} \frac{\sqrt{102}}{10} dt = 4\sqrt{102}.$$

Beispiel 3) Gegeben seien die Kurve

$$c : [0; 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad c : t \mapsto (4 \cos(t), 4 \sin(t), 3t)^T,$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x y z$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs c .

Hinweis: $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

Lösung:

$$\dot{c}(t) = (-4 \sin(t), 4 \cos(t), 3)^T,$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{(-4 \sin(t))^2 + (4 \cos(t))^2 + 3^2} =$$

$$f(c(t)) = 4 \sin(t) \cdot 4 \cos(t) \cdot 3t = 48t \cdot \sin(t) \cos(t) = 24t \cdot \sin(2t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{6\pi} f(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\| dt &= \int_0^{6\pi} 24t \cdot \sin(2t) \cdot 5 dt \\ &= 60 \int_0^{6\pi} t \cdot 2 \sin(2t) dt \\ &= 60 [t(-\cos(2t))]_0^{6\pi} - 60 \int_0^{6\pi} (-\cos(2t)) dt \\ &= \end{aligned}$$

Approximation periodischer Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und **periodisch** mit der Periode $T > 0$, also $f(t + T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Definiere $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = Kreisfrequenz und

$$T_n := \left\{ g : g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\} =$$

Raum aller T -periodischen **trigonometrischen Polynome vom Grad n** mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt.$$

und der Norm

$$\|g\| := \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T (g(t))^2 dt} = \sqrt{\langle g, g \rangle}.$$

Die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t) : k \in \mathbb{N} \right\}$

bilden eine Orthonormalbasis von T_n .

\implies beste Approximation für f aus T_n ist

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

die sogenannte **abgeschnittene Fourierreihe von f** mit

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\|f - f_n\| < \|f - g\| \quad \forall g \in T_n.$$

Praktische Besonderheiten:

$$\mathbf{f \text{ gerade}} : b_k = 0, a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathbf{f \text{ ungerade}} : a_k = 0, b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Weil zum Beispiel: } a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

Fourierreihe:

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (\text{reell})$$

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad (\text{komplex})$$

Zusammenfassung der Formeln für Fourierkoeffizienten:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\gamma_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = 2\gamma_0$$

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$$

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

$$b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$$

$$F_f(t) \sim f(t)$$

$$F_f(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2} \quad (\text{also} = f(t) \text{ falls } f \text{ stetig in } t)$$

Fortsetzungen:

Periodische Fortsetzung von $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

Gerade 2π periodische Fortsetzung von $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$

Ungerade π periodische Fortsetzung von $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos(x)$

BEISPIEL 1:) Gegeben sei

Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π -periodisch fortgesetzten Funktion $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$.

die Funktion ist gerade. Es gilt $b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Mit $T = 2\pi$ also $\omega = \frac{2\pi}{T} =$ gilt

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Für $k = 0$ erhält man den Mittelwert

$$a_0 =$$

$$\text{Also } \frac{a_0}{2} =$$

und für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) dx = \\ &= \frac{4}{2\pi} \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k} dx \\ &= \\ &= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade,} \\ \frac{-4}{k^2\pi} & k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist also gegeben durch

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2l-1)^2} \cos((2l-1)x).$$

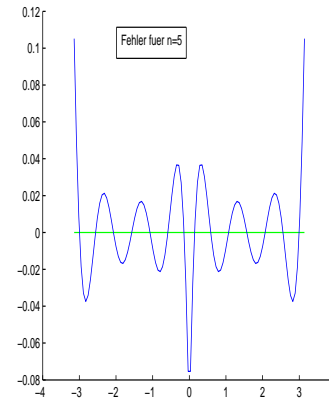
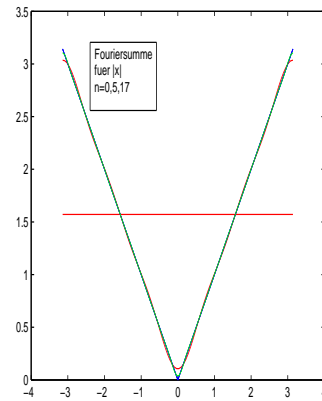


Abbildung 3: abgeschnittene Fourierreihen für $|x|$ $n=0, 5, 17$, Fehler für $n=5$

Es gilt $F_g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) =$

BEISPIEL 2:) Gegeben sei

$$h(t) = 2 \cosh(3t) - 4 \text{ auf dem Intervall } [0, 2]$$

Gesucht: die reellen Fourierkoeffizienten der 2-periodischen Fortsetzung.

Integrale über Produkte von cosh mit sin bzw. cos: nicht schön.

$$\text{Andererseits: } \cosh(3t) = \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2}$$

Für die komplexen Koeffizienten $\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T h(t) e^{-ik\omega t} dt$ und $h(t) = \cosh(3t)$ rechnet man :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (e^{3t} - e^{-3t}) e^{-ik\pi t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 e^{(3-ik\pi)t} - e^{(-3-ik\pi)t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{(3-ik\pi)t}}{3-ik\pi} - \frac{e^{(-3-ik\pi)t}}{-3-ik\pi} \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{(6-i2k\pi)}}{3-ik\pi} + \frac{e^{(-6-i2k\pi)}}{3+ik\pi} \right] \quad e^{(\pm i2k\pi)} = 1 \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3-ik\pi} + \frac{1}{3+ik\pi} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^6}{3-ik\pi} + \frac{e^{-6}}{3+ik\pi} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{3+ik\pi}{3^2-(ik\pi)^2} + \frac{3-ik\pi}{3^2-(ik\pi)^2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^6(3+ik\pi) + e^{-6}(3-ik\pi)}{9+k^2\pi^2} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{6}{9+k^2\pi^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{4(9 + k^2\pi^2)}(e^6(3 + ik\pi) + e^{-6}(3 - ik\pi) - 6)$$

$$a_0 = 2\gamma_0 = \frac{2}{4 \cdot 9} (e^6(3) + e^{-6}(3) - 6) = \frac{1}{2 \cdot 3} (e^6 + e^{-6} - 2) = \frac{1}{3} (\cosh(6) - 1)$$

$$\begin{aligned} a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} &= \frac{1}{4(9 + k^2\pi^2)} (e^6(3 + ik\pi) + e^{-6}(3 - ik\pi) - 6) \\ &\quad + \frac{1}{4(9 + k^2\pi^2)} (e^6(3 - ik\pi) + e^{-6}(3 + ik\pi) - 6) \\ &= \frac{1}{4(9 + k^2\pi^2)} (6e^6 + 6e^{-6} - 12) = \frac{3 \cosh(6) - 3}{9 + k^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}) &= \frac{i}{4(9 + k^2\pi^2)} (e^6(3 + ik\pi) + e^{-6}(3 - ik\pi) - 6) \\ &\quad - \frac{i}{4(9 + k^2\pi^2)} (e^6(3 - ik\pi) + e^{-6}(3 + ik\pi) - 6) \\ &= \frac{i}{4(9 + k^2\pi^2)} (2 \cdot ik\pi e^6 - 2 \cdot ik\pi e^{-6}) \\ &= \frac{i^2 k\pi}{2(9 + k^2\pi^2)} (e^6 - e^{-6}) = \frac{-k\pi}{9 + k^2\pi^2} \sinh(6) \end{aligned}$$

Für $h(t) = 2 \cosh(3t) - 4$ gilt dann mit

$$\tilde{a}_0 = 2a_0 - 8, \tilde{a}_k = 2a_k, \tilde{b}_0 = 2b_k, k \neq 0,$$

$$\tilde{\gamma}_0 = 2\gamma_0 - 4, \tilde{\gamma}_k = 2\gamma_k, k \neq 0:$$

$$h(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_k e^{ik\pi t} = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(k\pi t) + \tilde{b}_k \sin(k\pi t)$$