Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Hörsaalübung 6, Analysis II

SoSe 2020, 06./07. Juli

Uneigentliche und parameterabhängige Integrale, Rotationskörper

$$
\begin{aligned}
\int\ x^a\,dx &= \tfrac{x^{a+1}}{a+1}+C \qquad \forall a\in\mathbb{R},\ a\neq -1\\
\int\ x^{-1}\,dx &= \ln|x|+C\\
\int\ \sin(\beta\cdot x)\,dx &= -\tfrac{1}{\beta}\cos(\beta\cdot x)+C \qquad \forall\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0\\
\int\ \cos(\beta\cdot x)\,dx &= \tfrac{1}{\beta}\sin(\beta\cdot x)+C \qquad \forall\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0\\
\int\ \tfrac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x+C\\
\int\ e^{(\beta\cdot x)}\,dx &= \tfrac{1}{\beta}e^{(\beta\cdot x)}+C \qquad \forall\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0\\
\int\ \sinh x\,dx &= \cosh x+C\\
\int\ \cosh x\,dx &= \sinh x+C\\
\int\ \tfrac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x+C\\
\int\ \tfrac{1}{1-x^2}\,dx &= \mathsf{Artanh}\ x+C \qquad \forall|x|<1\\
\int\ \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x+C \qquad \forall|x|<1\\
\int\ \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \mathsf{Arsinh}\ x+C\\
\int\ \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \mathsf{Arcosh}\ x+C \qquad \forall|x|>1
\end{aligned}
$$

Uneigentliche Integrale

Bisher betrachtet:

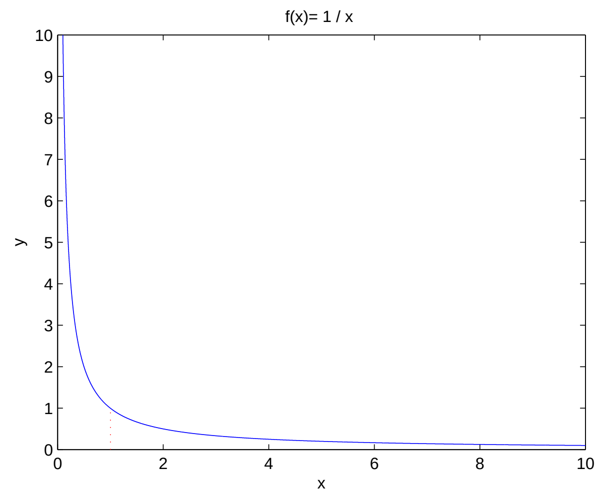
unbestimmtes Integral: $\int f(x)dx$ z.B. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C.$

bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)dx$ z.B. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2} + 1.$

beschränkter Integrand, beschränktes Intervall !

Frage: Machen die folgende Ausdrücke Sinn?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx,$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$



Naheliegend : Grenzwertbildung

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{z\to\infty}\int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{z\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^z \;=\; \lim_{z\to\infty} -\frac{1}{z} - (-\frac{1}{1}) \;=$$

analog

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{a\to 0+} -\frac{1}{x}\bigg|_a^1 \;=\; -1 - \lim_{a\to 0+}\frac{-1}{a} \;=$$

Man sagt im ersten Fall das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ existiert oder konvergiert und im zweiten Fall das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ existiert nicht oder divergiert.

Wie klären ob konvergent/divergent?

1. Fall: Stammfunktion berechnen und Grenzwert bilden

Wichtiges Beispiel 1) vgl. Vorlesung

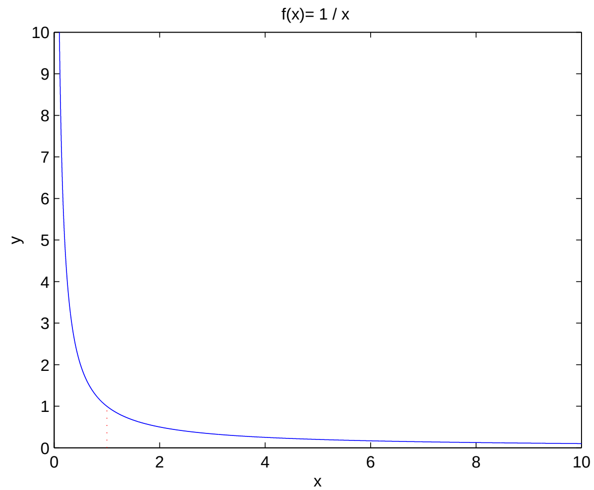
Sei $f(x) := \frac{1}{x^s}$, $s \in \mathbb{R}$, $I = (a, \infty)$, $a > 0$.

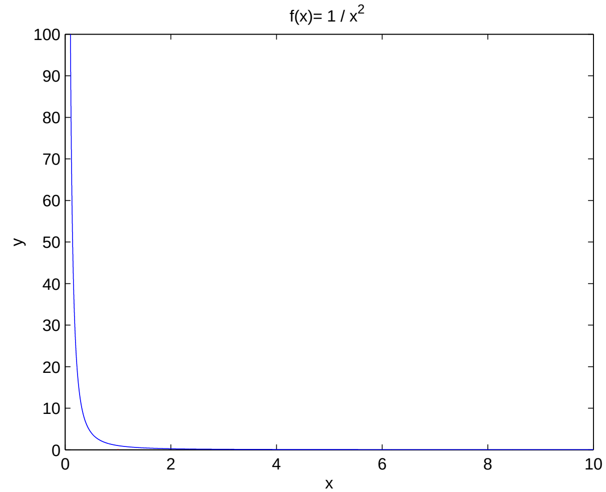
Dann ist f stetig in I und damit auf I lokal integrierbar. Es gilt

$$\int \frac{1}{x^s}\,dx = \int x^{-s} dx = \begin{cases} \frac{x^{-s+1}}{-s+1} + C & s \neq 1 \\ \ln|x| + C & s = 1 \end{cases}$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_a^z \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{z\to\infty} \left[\dfrac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_a^z & s \neq 1 \\ \lim\limits_{z\to\infty} [\ln|x|]_a^z & s = 1 \end{cases}$$

Fallunterscheidung:





$$\boxed{\int_a^\infty \frac{1}{x^s} dx, \ \ a > 0 \text{ existiert } \iff s > 1.}$$

Völlig analog schließt man

$$\boxed{\int_0^b \frac{1}{x^s} dx \text{ existiert } \iff s < 1.}$$

Zur Erinnerung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad \begin{cases} \text{divergiert für} & s \leq 1 \\ \text{konvergiert für} & s > 1 \end{cases}$$

Beispiel 2)

$$\int_0^\infty \cos(x)dx \; := \lim_{z\to\infty} \int_0^z \cos(x)dx$$

$$= \lim_{z\to\infty} \sin(x)\,\Big|_0^z = \lim_{z\to\infty} \sin(z) - \sin(0)$$

existiert nicht!

Beispiel 3:) Definitionslücke im Inneren des Integrationsintervalls

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx =$$

beide Integrale müssen unabhängig von einander konvergieren!

Im Falle der Existenz, gilt

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx = \lim_{a\to 1-} \int_0^a \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx + \lim_{b\to 1+} \int_b^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$$

2.Fall: Stammfunktion nicht bekannt, nur Existenz/Konvergenz prüfen

Satz (Majoranten- /Minorantenkriterium):

Seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gelten:

Majorantenkriterium

- Ist $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent,

  so konvergiert auch $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$
- Ist $0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent,

  so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$

. Außerdem $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent!

Gilt wieder analog für $I = (-\infty, b]$, und im Falle einer isolierten Definitionslücke. Liegen mehrere Problemstellen vor, so wird das Integral zerlegt, so dass man es jeweils nur mit einem Problem zu tun hat.

Beispiel 4:)

$$\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+1}\,dx\,.$$

Beachte: Für $a > 0$: $\int_a^\infty \frac{1}{x^s}dx \quad \begin{cases} \text{divergiert für} & s \leq 1) \\ \text{konvergiert für} & s > 1) \end{cases}$

Beispiel 5:) $\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 2x^2 + 1}}\,dx$

Beispiel 6:) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^3+4x}}\,dx$

Beispiele Parameterabhängiger Integrale

- Die **Gammafunktion** wird für $x > 0$ definiert als

$$\Gamma(x) := \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \, .$$

Gammawahrscheinlichkeitsverteilung / Versicherungsmathematik

- Der **Integralsinus** wird definiert als

$$Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} \, dt.$$

Signalverarbeitung

- Die **Frenelschen Integrale** (Optik / Quantenmechanik)

$$S(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin(t^2) \, dt \qquad C(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos(t^2) \, dt$$

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f : t \mapsto f(t)$ eine hinreichend glatte, für $t \to \infty$ höchstens exponentiell wachsende (d.h. $\exists \sigma, M \in \mathbb{R}^+ \; : \; |f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t > 0$) Funktion.

Die **Laplacetransformierte** von f wird definiert als

$$L(f)(s) := F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \,, \qquad \forall s > \sigma \,.$$

Man schreibt auch $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$.
Mit Hilfe der Laplacetransformation läßt sich die Lösung von Differentialgleichungen auf die Lösung algebraischer Gleichungen zurück führen.

Alle oben aufgeführten Integrale hängen außer von der Integrationsvariablen noch von einer weiteren Unbekannten (einem Parameter) ab. Solche Integrale nennt man **parameterabhängige Integrale**.

FRAGE: Wie verändern sich die Werte solcher Integrale, wenn man an dem Parameter wackelt? Wie sieht also die Ableitung nach dem Parameter aus?

Leibniz–Regel :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt + b'(x)\, f(x, b(x)) - a'(x)\, f(x, a(x))}$$

Beispiel 7: Es sei $f_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

und für $n \in \mathbb{N}$: $\qquad f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n & t \geq 0\,. \end{cases}$

bf a) Für welche s existiert die Laplace-Transformierte von f_0?

$$L(f_0)(s) \;:= F_0(s) := \int_0^\infty e^{-st} dt$$

b) Berechnen Sie im Falle der Existenz $F_0'(s)$ und $F_0''(s)$.

$$F_0(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$F_0'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty \left(e^{-st}\right) dt =$$

$$=$$

$$F_0''(s) =$$

c) Berechnen Sie für $s > 0$: $\qquad F_1(t)$

d) Zeigen Sie: $F_n(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Beweis: Induktion nach n.

Induktionsanfang: siehe oben.

Annahme: für ein festes, beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $F_{n-1}(s) = \dfrac{(n-1)!}{s^n}$.

Schritt:

Volumen von Rotationskörpern

Sei K der Körper K der durch Rotation des Graphens der Funktion

$$f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}\,, \quad f(x) = y$$

um die x-Achse entsteht. Zur Volumenberechnung zerlegen wir $[a,b]$ in Teilintervalle

$$Z\,: \quad a = x_0 \,<\, x_1 \,<\, x_2 \,<\, \cdots\, x_n = b\,.$$

und schneiden den Körper mit Ebenen durch x_i, parallel zur $y-z-$Ebene.

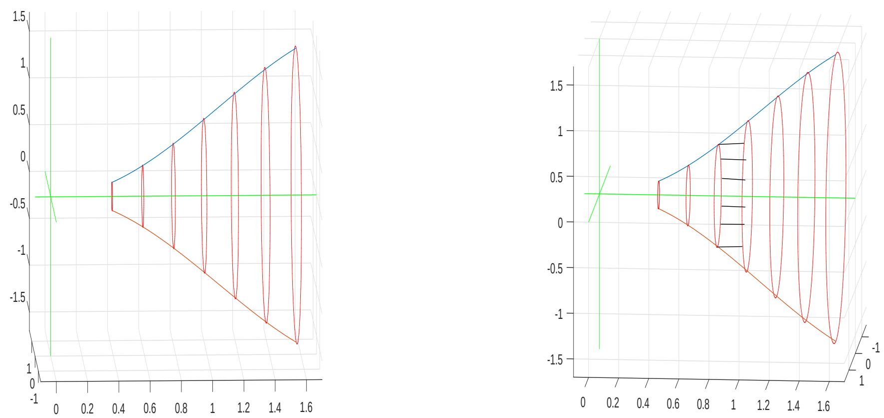


Abbildung 1: Rotation von $f(x) = x\sin(x)$ um die x-Achse

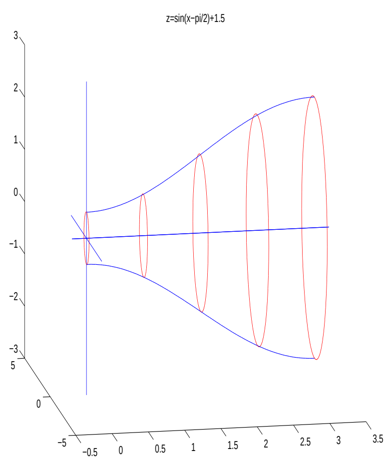
Es entstehen Kreisscheiben mit den Flächeninhalten $Q(x) = \pi \, (f(x_i))^2$

Approximiere den Körper, der zwischen der Mantelfläche und der x-Achse entsteht, durch Zylinderscheiben parallel zur $y-z-$ Ebene, mit den Radien $f(x_i)$ und der Höhen $x_i - x_{i-1}$.

$$V \approx V_n := \sum_{i=1}^{n} \pi \, (\, f(x_i)\,)^2 \, (x_i - x_{i-1})$$

Ist f^2 integrierbar, so konvergiert V_n bei gegen Null konvergierenden Feinheiten der Zerlegungen gegen das Volumen des Rotationskörpers und die Summen konvergieren gegen ein Integral. Nämlich gegen

$$V = \pi \int_a^b (\, f(x)\,)^2 \, dx \, .$$



Mantelflächen von Rotationskörpern

Betrachte Körper K dessen Mantelfläche durch Rotation des Graphens einer Funktion

$$f:\,[a,b] \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}\,, \quad f(x) = y$$

um die x-Achse entsteht. Schneide den Körper mit Ebenen parallel zur $y - z-$Ebene und approximiere

Mantelfläche $\approx \sum$ Mantelflächen von Kegelstümpfen.

$$\boxed{M = \int_a^b 2\pi\, f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Beispiel: Rotation des Graphen von

$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cosh(x)$ um die x-Achse

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx\,, \qquad M = \int_a^b 2\pi\, f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$