Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 5 Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Integrationstechniken

22/23.06.2020

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

$$
\begin{aligned}
\int x^a\,dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \forall a \neq -1 \\
\int x^{-1}\,dx &= \ln|x| + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad \forall a \neq 0 \\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x + C \\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C \qquad \forall |x| < 1 \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \mathsf{Artanh}\ x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \qquad \forall |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \mathsf{Arsinh}\ x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \mathsf{Arcosh}\ x + C \qquad \forall |x| > 1
\end{aligned}
$$

Substitution oder Umkehrung der Kettenregel der Differentiation:

$$(C + \; F(x(t))\,)' = F'(x(t)) \cdot x'(t) \qquad \text{mit } F' =: f, \quad x'(t) \neq 0$$

$$C + \; F(x(t)) = \int F'(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$= \int f(x) \cdot x'(t) dt = \int f(x) \cdot \frac{dx}{dt} dt$$

$$\int_a^b f(x(t)) \cdot x'(t) dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \; F(x(b)) - F(x(a))$$

ACHTUNG : Grenzen nicht vergessen!!

Beispiel 1: $\int \cos(5t)\, dt$

Beispiel 2: $\displaystyle\int \cos(t^2)\,dt$

Beispiel 3: $\displaystyle\int \cos(t^2)\cdot t\,dt$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t \cdot \cos(t^2)dt$$

Beispiel 4: Typ $\dfrac{x'(t)}{x(t)}$

$$\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t\ dt$$
$$= \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C = \ln(t^2+1) + C.$$

$$\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_{x(0)}^{x(1)} \frac{1}{x} dx$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt \ = \ \ln(|x(t)|) + C}$$

Beispiel 5: Typ $\boxed{f(\cos(t)) \cdot \sin(t) \text{ **oder** } f(\sin(t)) \cdot \cos(t)}$

bzw. $\boxed{f(\cosh(t)) \cdot \sinh(t) \text{ oder } f(\sinh(t)) \cdot \cosh(t)}$

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))^2 \cos(t)\, dt \; = \qquad\qquad x =$$

$$= \int_{x(0)}^{x(\pi/2)}$$

$$=$$

$$=$$

$$= \frac{8}{15}$$

Beispiel 6: Typ $f(x^k + a) \cdot x^{k-1}$, $a \in \mathbb{R}$ **konstant.**

Setze $u = x^k + a.$

Dann gilt $\frac{du}{dx} = kx^{k-1}$

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,x\,dx \qquad \text{mit } u = x^2$$

$$=$$

$$=$$

Integranden der folgenden Formen

$$\frac{1}{a+b(x-c)^2}\,,\ \frac{1}{a-b(x-c)^2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{a-b(x-c)^2}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{a+b(x-c)^2}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{b(x-c)^2-a}}$$

werden auf die Standardintegrale

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \mathsf{Artanh}\ x + C = \tfrac{1}{2}\ln\left(\left|\tfrac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \qquad \forall |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C \qquad \forall |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \mathsf{Arsinh}\ x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \mathsf{Arcosh}\ x + C \qquad \forall |x| > 1
\end{aligned}$$

(vgl. Seite 2) zurück geführt.

Beispiel 7: $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx$

Schritt 1: Erzeuge quadratische Term im Nenner mittels quadratischer Ergänzung:

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 13 =$$

Schritt 2: Erzeuge konstanten Summanden 1 im Nenner:

$$4 + (x+3)^2 =$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx &= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x+3)^2+4}\,dx \\
&= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{4(1+\frac{(x+3)^2}{4})}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-3}^{-1} \frac{1}{1+(\frac{x+3}{2})^2}\,dx && \text{Substitution} \\
&= \frac{1}{4}\int_{t(-3)}^{t(-1)}
\end{aligned}
$$

Partielle Integration oder Umkehrung der Produktregel der Differentiation:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Beispiele:

A) $\int (x+1)\ \sin(x)\,dx$

B) $\int x\ \ln(x)\,dx$

Typische Anwendungsbereiche:

Polynom $*$ $\cos$ / $\sin$ / $\exp$ / $\ln$ / $\arcsin$ etc.
Produkte aus Exponential–/Sinus–/Cosinusfunktionen

Faustregeln:

$$\text{Polynom} \quad * \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \\ \exp \end{pmatrix} \qquad f = \text{ Polynom } , \; g' = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \\ \exp \end{pmatrix}$$

Bei Polynom n–ten Grades : n-mal partiell integrieren!

$$\text{Polynom} \quad * \begin{pmatrix} \arccos \\ \arcsin \\ \ln \end{pmatrix} \qquad g' = \text{ Polynom } , \; f = \begin{pmatrix} \arccos \\ \arcsin \\ \ln \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \\ \exp \\ \sin \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \\ \exp \end{pmatrix} \qquad \text{2 mal partiell integrieren}$$

Beispiel C:

$$\int (x^2 - x + 1)\sin(kx)\,dx \;=$$

$$= \left[(x^2 - x + 1)\,\frac{-\cos(kx)}{k}\right] - \int (2x - 1)\,\frac{-\cos(kx)}{k}\,dx$$

$$= \frac{(-x^2 + x - 1)\cos(kx)}{k}$$

$$= \frac{(-x^2 + x - 1)\cos(kx)}{k} +$$

$$= \frac{(-x^2 + x - 1)\cos(kx)}{k} +$$

$$= \frac{(-x^2 + x - 1)\cos(kx)}{k} +$$

Beispiel D:

$$I := \int e^{2x}\cos(4x-3)\,dx \;=\; \left[\frac{e^{2x}}{2}\cos(4x-3)\right] - \int \frac{e^{2x}}{2}(-4\sin(4x-3))\,dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cos(4x-3) + \int 2e^{2x}\sin(4x-3)\,dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cos(4x-3) + e^{2x}\sin(4x-3) - \int e^{2x}\cdot 4\cos(4x-3)\,dx$$

Also $\quad I \;=\; \dfrac{e^{2x}}{5}\left(\tfrac{1}{2}\cos(4x-3) + \sin(4x-3)\right) + C.$

Integration rationaler Funktionen $\tilde{f}(x) = \tilde{p}(x)/q(x)$

$\tilde{p}$ und q : Polynome mit reellen Koeffizienten

Gesucht: Stammfunktion von $\tilde{f}$.

Schritt 1 : Polynomdivision $\tilde{p}(x)/q(x) = g(x) + p(x)/q(x)$
g, p: Polynome und grad$(p) <$ grad(q).

BEISPIEL: $\tilde{f}(x) = \dfrac{x^6 + 7x^2 + 8x + 4}{x^4 - 1}$

$$x^6 + 7x^2 + 8x + 4 \ : \ x^4 - 1 = x^2$$

$$x^6 - 1x^2$$

$$=== ===========$$

$$8x^2 + 8x + 4$$

$$\tilde{f}(x) = x^2 + \frac{8x^2 + 8x + 4}{x^4 - 1}$$

Der polynomiale Teil (hier x^2) kann einfach integriert werden.

Im folgenden: Integration von

$$f(x) := p(x)/q(x) \qquad p, q \text{ reelle Polynome, und } \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q).$$

IDEE : Schreibe f als Summe einfacherer Brüche. Die Nenner dieser Brüche müßten dann multiplikative Faktoren von q sein. Zerlege also q in einfachere Faktoren.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

Schritt 2 : Bestimme Nullstellen bzw. quadrat. Faktoren von q

BEISPIEL:

$$x^4 - 1 = 0 \iff (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\iff (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$$

$$\implies f(x) = \frac{p(x)}{x^4 - 1} = \frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Schritt 3 : Ansatz für f
Kann ich f schreiben als:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{?}{x-1} + \frac{?}{x+1} + \frac{?}{x^2+1}\ ?$$

Im allgemeinen Fall gehen wir von Grad$(p) \leq$ Grad $(q) - 1$ aus. Bildet man aus den Brüchen rechts wieder einen Bruch mit (dem alten) gemeinsamen Nenner, so sollten im Zähler Polynome bis Grad$(q) - 1$ entstehen können. Daher der Ansatz:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Schritt 4 : Berechnung der Unbekannten im Ansatz für f

$$f(x) = \frac{8x^2+8x+4}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Bilde auf der rechten Seite wieder den gemeinsamen Nenner:

$$f(x) = \frac{8x^2 + 8x + 4}{x^4 - 1}$$

$$= \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Da die Nenner gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein! Also

$$8x^2 + 8x + 4 \;=\; a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)(x+1)\,!$$

1.Möglichkeit: Einsetzen einfacher Werte, insbesondere Einsetzen der Nullstellen von q.

2.Möglichkeit: Zähler ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

$$8x^2 + 8x + 4 \overset{!}{=} a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)$$

$$x = -1 \ : 8 - 8 + 4 \ = \ b(-2)(2) \implies b = -1$$

$$x = +1 \ : 8 + 8 + 4 \ = \ a(2)(2) \implies a = 5$$

$$x = 0 \ : 4 \ = \ a - b - d \implies 4 = 6 - d \implies d = 2$$

$$0 \cdot x^3 = (a + b + c)x^3 = (4 + c)x^3 \implies c = -4$$

Es gilt also $f(x) = \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-4x+2}{x^2+1}$.

Schritt 5 : Integration der Bausteine
Zwei der Bausteine der Summe können wir sofort integrieren.

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \ln|x-a| \, + \, C & k = 1. \\ \dfrac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \, + \, C & k \in \mathbb{N},\ k \neq 1\,. \end{cases}$$

Es bleibt: $\displaystyle \int \frac{-4x+2}{x^2+1}\,dx$

IDEE: zerlege in einen Logarithmus also $u'(x)/u(x)$ Term und einen $\arctan$ also $1/(1+t^2)$ Term

Denn $\displaystyle \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx \;=\; \int \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\,dx \;=\; \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}\,dx \;=\; \ln(|u|) + C$

und $\displaystyle \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \arctan(t) + C$

Hier

$$\int \frac{-4x+2}{x^2+1}dx \;=\; -2\int \frac{2x}{x^2+1}dx \;+2\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(\frac{5}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{-4x+2}{x^2+1}\right) dx \\ &= 5\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) - 2\,\ln(x^2+1) \;+\; 2\arctan(x) + C.\end{aligned}$$

Methode übertragbar auf beliebige Nenner mit einfachen Nullstellen.

Mehrfache Nullstellen des Nenners:

Doppelte reelle Nullstelle: $q(x) = (x - x_0)^2 \cdot \tilde{q}(x)$

Verwende im Ansatz $$\frac{c_1}{(x-x_0)^1} + \frac{c_2}{(x-x_0)^2}$$

Dreifache reelle Nullstelle: $q(x) = (x - x_0)^3 \cdot \tilde{q}(x)$

Verwende im Ansatz $$\frac{c_1}{(x-x_0)^1} + \frac{c_2}{(x-x_0)^2} + \frac{c_3}{(x-x_0)^3}$$

Beispiel für Dreifache Nullstelle :

$$I = \int f(x)dx = \int \frac{4x^3 + 7x^2 + 3x + 1}{x(x+1)^3}$$

Ansatz

$$f(x) = \frac{a}{(x-(-1))} + \frac{b}{(x-(-1))^2} + \frac{c}{(x-(-1))^3} + \frac{d}{x}$$

Weitere Anwendungsmöglichkeiten: (vgl.Aufgabe 4 und Seite 103 Vorlesung)

$R(e^x, \sinh(x), \cosh(x))$: Substitution $u = e^x$.

$R(\sin(x), \cos(x))$: Substitution $t = \tan(x/2) \Longrightarrow$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (Nachrechnen!).

$$\frac{x}{2} = \arctan(t) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Longrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)}\, dx =$$

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$

Mit der Substitution

$$t := e^x\,, \quad \tfrac{dt}{dx} = e^x = t\,, \quad dx = \tfrac{dt}{t}\,,$$

erhält man

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1}\,dx \;=\; \int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{dt}{t}$$

Ansatz

Die Koeffizienten errechnen sich aus der Bedingung

$$1 \;=\; a(t^2+1) + t\cdot(bt+c)\,.$$

Zusammenfassung: Integration beliebiger rationaler Funktionen

Schritt 1 : Falls Zählergrad $\geq$ Nennergrad: Polynomdivision. Wir befassen uns im folgenden mit der Integration von

$$f(x) := p(x)/q(x) \qquad p, q \text{ reelle Polynome, und } \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q).$$

Schritt 2 : Zerlegung von q in Linearfaktoren und quadratische Faktoren.

Schritt 3 : Ansatz

Schreibe für jede $m-$fache reelle Nullstelle n folgende Terme in die angesetzte Summe:

$$\boxed{\frac{a_1}{(x-n)^1} + \frac{a_2}{(x-n)^2} + \cdots + \frac{a_m}{(x-n)^m}}$$

Schreibe für jedes $m-$fache Paar komplexer Nullstellen $z_k, \bar{z}_k$ mit

$$(x-z)(x-\bar{z}) = (x^2 + \alpha x + \beta)$$

folgende Terme in die angesetzte Summe:

$$\boxed{\frac{b_1 x + c_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \cdots + \frac{b_m x + c_m}{(x^2 + \alpha x + \beta)^m}\,.}$$

Schritt 4 : Berechnung der Unbekannten im Ansatz für f

Um die noch freien Parameter in der Darstellung für f zu bestimmen, bringt man wieder alles auf einen (den alten) gemeinsamen Nenner und löst durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen bestimmter Werte.

Schritt 5 : Integration der Bausteine