Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani Sose 2020

Hörsaalübung zu Blatt 4 Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

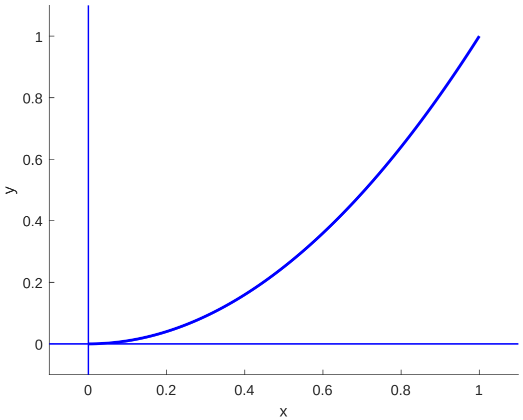
Integration: Teil 1
08/09.06.2020

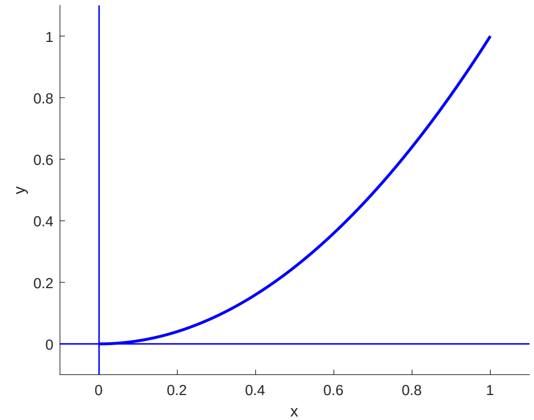
Bitte geben Sie Ihre Hausaufgaben bei der für Sie zuständigen studentischen Hilfskraft ab:

https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/20/korrektur-aII20.pdf

Das bestimmte Integral:

Motivation/Veranschaulichung:





Allgemeiner: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, und $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, stückweise stetig

$f(x) =$Länge $\longrightarrow$ Flächenberechnung,
$f(t) =$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t $\longrightarrow$ Strecke
$f(x) =$ Kraft $\longrightarrow$ Arbeit
u.v.m.

Zur Erinnerung aus der Vorlesung:

- $Z := \{a =: x_0, x_1, \cdots, x_n := b\}$ **Zerlegung** von $[a, b]$

  $\| Z \| := \max\{|x_j - x_{j-1}| : j = 1, \cdots n\}$ = **Feinheit** der Zerlegung Z

  $Z[a, b]$ Menge aller möglichen Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$.

- Eine Summe der Form

$$S_f(Z; \xi_1, \cdots, \xi_n) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{mit } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

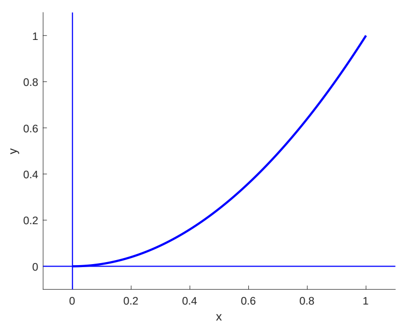
  heißt **Riemannsche Summe** zur Zerlegung Z mit den Zwischenstellen $\xi_1, \cdots, \xi_n$.

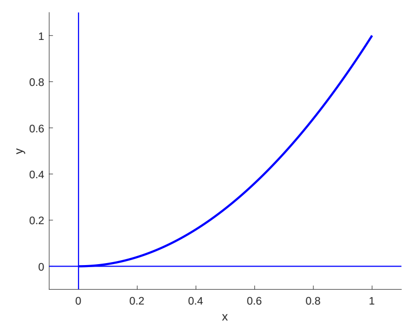
$$U_f(Z) := \sum_{i=1}^{n} \inf f([x_{i-1}, x_i])\,(x_i - x_{i-1})$$

- heißt **Untersumme** von f zur Zerlegung Z,

$$O_f(Z) := \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1}, x_i])\,(x_i - x_{i-1})$$

- heißt **Obersumme** von f zur Zerlegung Z.





Zerlegung immer feiner $\longrightarrow$ monoton wachsende Folge von Untersummen, nach oben durch jede Obersumme beschränkt und monoton fallende Folge von Obersummen, die nach unten durch jede Untersumme beschränkt ist. Die Folgen konvergieren also beide.

- $\displaystyle\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\ dx := \sup\{U_f(Z) : Z \in Z[a,b]\}$

  heißt **Unterintegral** von f über [a,b].

- $\displaystyle\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx := \inf\{O_f(Z) : Z \in Z[a,b]\}$

  heißt **Oberintegral** von f über [a,b].

- Stimmen Ober– und Unterintegral überein, so heißt f **Riemann integrierbar** über [a,b] und

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx := \int_{\bar{a}}^{b} f(x)\ dx = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx$$

  heißt Riemann Integral von f über [a,b].

BEISPIEL 1) $f\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}\,,\quad f(x)=\,x^2$.

$A=$ Flächeninhalt von $\left\{(x,y)\,\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le x\le 1,\,0\le y\le x^2\,\right\}$.

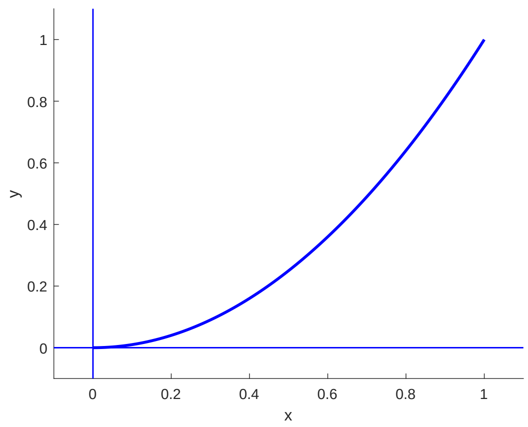
Also $A=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.

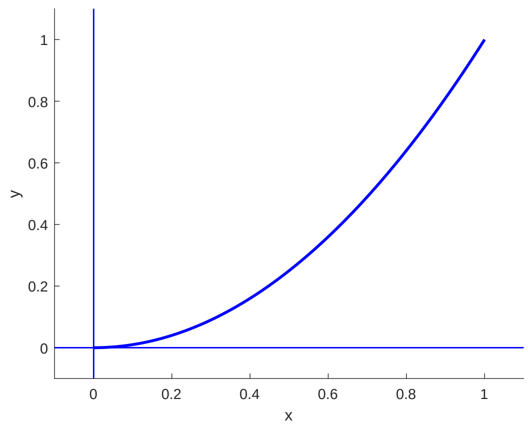
Für $n\in\,\mathbb{N}$ definieren wir die Zerlegung

$$Z_n:=\left\{x_{kn}:=\frac{k}{n}\,,\,k=0,1,2,\cdots,n\right\}\,.$$

Dann ist zum Beispiel

$Z_5=$





$$U_f(Z_5) =$$

$$O_f(Z_5) =$$

$$\left| \frac{O_f(Z_5) + U_f(Z_5)}{2} - A \right| \leq \frac{O_f(Z_5) - U_f(Z_5)}{2}$$

Aus Analysis I bzw. Analysis II, Aufg.3b, Blatt 3:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(n+1)$$

$$U_f(Z_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$$

$$O_f(Z_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$O_f(Z_n) - U_f(Z_n) =$$

$$\left|\,\frac{O_f(Z_n) + U_f(Z_n)}{2} - A\,\right| \leq \frac{O_f(Z_n) - U_f(Z_5)}{2} =$$

Stammfunktionen : Seien $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, F stetig diff.bar und

$$F'(x) = f(x) \; \forall \; x \in [a, b] \, .$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f. Es gilt

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt$$

Wird der Wert von C offen gelassen, so spricht man vom **unbestimmten Integral** und schreibt

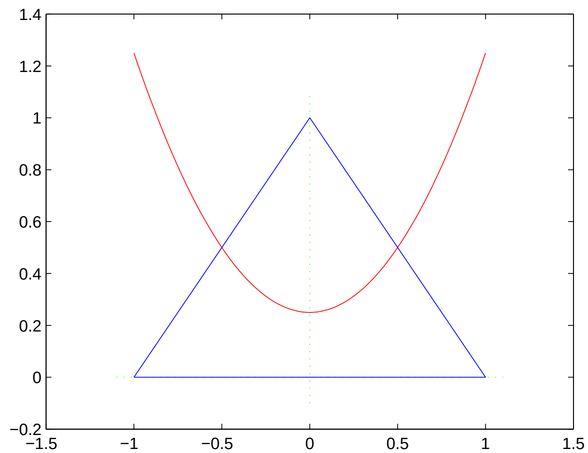
$$\int f(x)dx = F(x) + C \, .$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a) \;=:\; F(x)\,\big|_a^b \;=:\; \big[F(x)\,\big]_a^b \; .$$

Die Integration ist in gewissem Sinne die Umkehrung der Differentiation. **Aber Vorsicht:** Die Umkehrung liefert keine eindeutige Funktion sondern eine Klasse von Funktionen, die sich unter einander nur um additive Konstanten unterscheiden.

$$
\begin{aligned}
\int x^a\,dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \forall a \neq -1 \\
\int x^{-1}\,dx &= \ln|x| + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad \forall a \neq 0 \\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x + C \\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C \qquad \forall |x| < 1 \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \mathsf{Artanh}\ x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \qquad \forall |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \mathsf{Arsinh}\ x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \mathsf{Arcosh}\ x + C \qquad \forall |x| > 1
\end{aligned}
$$

BEISPIEL 2) Gegeben seien das Dreieck mit den Ecken (-1,0), (0,1) und (1,0) und die Parabel $y = \frac{1}{4} + x^2$. Der Graph der Parabel zerlegt das Innere des Dreiecks in zwei disjunkte Teile. Berechnen Sie deren Flächeninhalte.

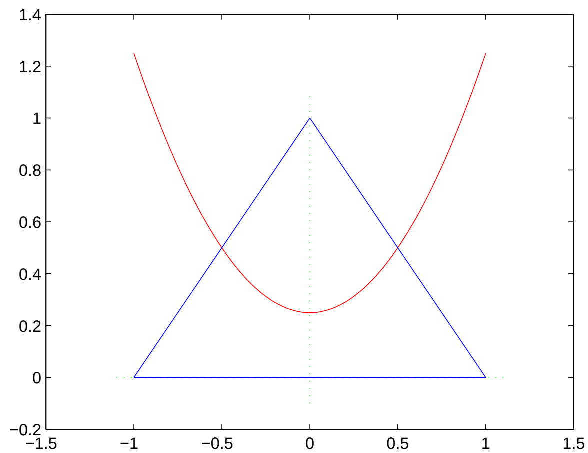


Symmetrie:

Schnittpunkte von Graphen von $g(x) = 1 - x$ und $f(x) = \frac{1}{4} + x^2$.

$$1 - x = \frac{1}{4} + x^2 \Longleftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow x + \frac{1}{2} = \pm 1$$

Der einzige Schnittpunkt im Intervall [0,1] ist also $x_1 = \frac{1}{2}$.



Die Fläche F_1 ergibt sich wie folgt.

$$F_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x - (\frac{1}{4} + x^2)\right)\, dx \;=\; 2\left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{5}{12}$$

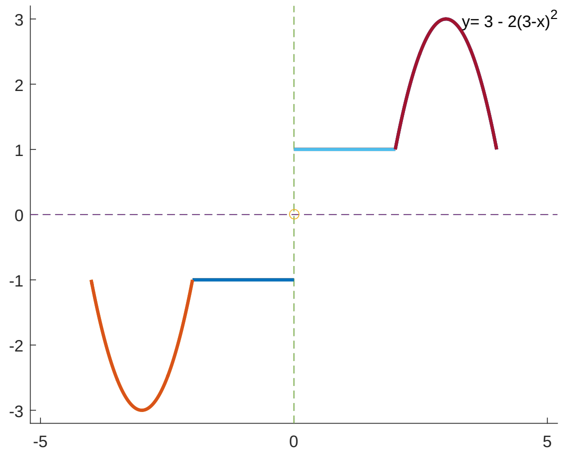
Die Fläche F_2 ergibt sich als Fläche des Dreiecks $-F_1 = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$.

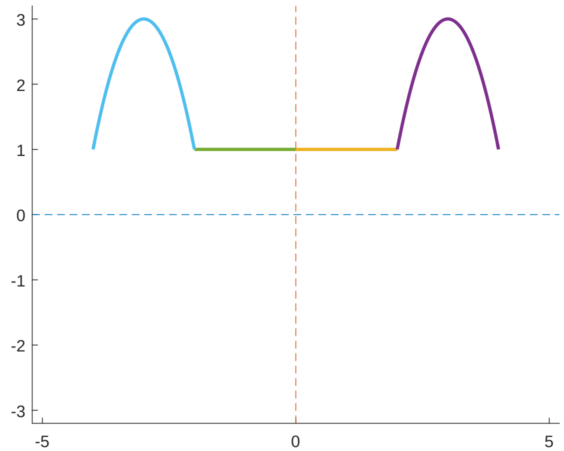
Beispiel 3: Linearität, Vereinfachung von Ausdrücke, Symmetrie

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x))dx \qquad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$$

Integrale ungerader Funktionen über $[-a, a]$ verschwinden.

Für gerade Funktionen gilt: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx \,=\, 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx\,.$





Beispiel 3A:

$$\int_{-3}^{3} (x+1)\cos(x) + x^3 + 2x^2 \, dx.$$

Beispiel 3B:

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} + 3}{x}\, dx$$

Beispiel 3C: $$\int \frac{5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 6x + 1}{x^2 - 1}\, dx =$$

Und was bei $\displaystyle\int \frac{5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1}\, dx =$

Beispiel zur Aufgabe 4: Nach Vorlesung Folie 90 ist die Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ nicht durch eine mit elementaren Funktionen ausdrückbare Stammfunktion darstellbar.

Sei $E(x) := \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

a) Gesucht: Taylorreihe der Funktion $E(x)$ mit $x_0 = 0$, sowie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; 0)$ zu E.

b) Es seien folgende Werte der Funktion $E(x) := \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ bekannt.

x	0.0	0.2	0.3	0.4
$E(x)$	0.000000	0.19736503	0.29123788	0.37965284

Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Interpolationspolynoms einen Näherungswert für $E(0.25)$ mit einem theoretisch abgesicherten relativen Fehler von maximal 1% .

Lösung:

a) Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung gilt:

$$E'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \;=\; e^{-x^2}$$

Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion $\exp(z)$ mit $z = -x^2$ folgt

$$(E(x))' \;=\; e^{-x^2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

Durch Integration erhält man

$$E(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

Und C?

Wegen $E(0) = 0$ folgt $C = 0$.

$T_3(x;0) =$

$T_3(0.25;0) \;=\; 0.2448$

Tipp zur Fehlerabschätzung in Aufgabe 4a:

b) Versuche lineare Interpolation mit den Daten zu $x_0 = 0.2$ und $x_1 = 0.3$.

Da $0.25 = \dfrac{0.2 + 0.3}{2}$ gilt, liefert die lineare Interpolation

$$E(0.25) \approx p_1(0.25) = \frac{E(0.2) + E(0.3)}{2} = 0.244301455$$

Oder

Oder

Aus Teil a) haben wir bereits $E'(x) = e^{-x^2}$.

Damit folgt $E''(x) =$

Für den absoluten Fehler gilt dann

$$\begin{aligned}|A(0.25)| &= \frac{|E''(\theta)|}{2!}(0.3-0.25)(0.25-0.2)\\ &\leq 2(0.3)e^{-(0.2)^2}\frac{1}{2\cdot 400} < \frac{3}{4000} = 0.00075\end{aligned}$$

Da der Integrand positiv ist, gilt $E(0.25) > E(0.2) > 0$,

was man natürlich auch an der positiven Ableitung von E ablesen kann.

Für den relativen Fehler gilt damit

$$|R(0.25)| \leq \frac{0.00075}{E(0.25)} \leq \frac{0.00075}{E(0.2)} < \frac{0.00075}{0.15} = 0.005 < 0.01.$$

Die errechnete Approximation hat also die erforderliche Genauigkeit.

Mit Taschenrechner: $e^{-(0.2)^2} < 0.961$ nutzen statt Abschätzung mit 1

und zum Beispiel

$E(0,2) \geq 0.19735$ statt der groben Abschätzung $E(0,2) \geq 0.15$.

Dann erhält man als Schranke für den absoluten Fehler 0.0007207

und für den relativen Fehler die Schranke 0.003652.