Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

Sose 2020

Hörsaalübung zu Blatt ~~2~~ 3 Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Potenzreihen: Teil 2, elementare Funktionen, Interpolation

18/19.05.2020

Bitte geben Sie Ihre Hausaufgaben bei der für Sie zuständigen studentischen Hilfskraft ab:

https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/20/korrektur-aII20.pdf

Sorry wegen der Tonqualität auf Seite 3 im Video! Rest sollte okay sein.

Einige Techniken zur Berechnung von Potenzreihen :

- Geometrische Reihe (siehe letzte HÜ/Übung)
- Bekannte (Taylor-)Reihen /Koeffizientenvergleich (Beispiele 1,2,4)
- Integration/Differentiation (Beispiel 3)
- Binomische Reihe (Vorlesung)
- Produkte von Reihen (Beispiel 4)
- ....

Potenzreihen elementarer Funktionen:

- **Exponentialreihe:** Definiere für $z \in \mathbb{C}$ $\boxed{\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$

- **Die Hyperbel-Funktionen : sinh, cosh**

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die Hyperbel-Funktionen sinh, cosh sind also der ungerade bzw. der gerade Anteil von $\exp(x)$. Es gilt jeweils $\boxed{r = \infty}$.

$\sinh'(ax) = a \cdot \cosh(ax)$, $\cosh'(ax) = a \cdot \sinh(ax)$

- **Die Trigonometrischen Funktionen : Sinus, Cosinus**

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{r = \infty}$$

Wegen $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ gilt

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\exp(iz) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4k}}{(4k)!} - \frac{z^{4k+2}}{(4k+2)!} \right) \; + \; i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{z^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) \; + \; i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\
&= \cos(z) + i \cdot \sin(z)\,.
\end{aligned}
$$

BEISPIEL 1) Gesucht: Potenzreihenentwicklung und das Taylorpolynom zweiten Grades zu f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für

$$g(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{6x \;-\; 6\sin(x)}{x^3}, & x \neq\; 0\,, \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

Lösung: Für $x \neq 0$ erhält man mit

$\sin(x) =$

$$g(x) \;=\; \frac{6x - 6\sin(x)}{x^3} \;=\; \frac{6x - 6\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^3}$$

$$g(x) =$$

$$T_2(x;0) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{20}.$$

Offensichtlich stimmt das Taylor-Polynom auch im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Potenzreihen mit Hilfe von Koeffizientenvergleichen

BEISPIEL 2) Berechnen Sie das Taylorpolynom fünften Grades $T_5(x;0)$ von

$$g(x) = \frac{4\sin(x)}{3 - x^2 - 2\cos(x)}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, ohne Ableitungen zu berechnen.

Symmetrie:

Ansatz für das Taylorpolynom:

$T_5(x;0) =$

$$\frac{4\sin(x)}{3-x^2-2\cos(x)} = \frac{4\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)+O(x^7)}{3-x^2-2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)+O(x^6)}$$

$$= \frac{4x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{30}x^5+O(x^7)}{1-\frac{1}{12}x^4+O(x^6)} = a_1x+a_3x^3+a_5x^5+O(x^7)$$

$\iff$

Koeffizientenvergleich liefert:

$4 = a_1, \qquad -\frac{2}{3} = a_3, \qquad \frac{1}{30} = a_5 - \frac{a_1}{12} \Longrightarrow \ a_5 = \frac{11}{30}\,.$

$T_5(x;0) =$

BEISPIEL 3)

Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion $g(x) = \dfrac{8x}{(4x-2)^2}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\left(\frac{1}{4x-2}\right)' = \frac{-4}{(4x-2)^2}$$

$$g(x) = -2x \cdot \left(\frac{1}{4x-2}\right)'$$

$$\frac{1}{4x-2} =$$

$$g(x) = -2x \cdot \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k \right)' = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (2^k \cdot x^k)'$$

(Cauchy-) Produkte von Reihen Nach Vorlesung gilt für das Produkt von zwei Potenzreihen, dort wo beide Reihen konvergieren

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \, z^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} \, b_l \right) \cdot z^k$$

BEISPIEL 4)

$$\frac{\cos(z)}{1-z} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \right) \cdot z^k \qquad \forall |z| < 1 \,.$$

Interpolation

Ausgangssituation: Gegeben seien die Datenpaare

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots, (x_n, y_n) \qquad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j.$$

Dabei kann es sich um Messergebnisse, Tabellenwerte oder aber auch um Werte einer schwer zu bearbeitenden (z.B. zu integrierenden) Funktion handeln. Gesucht ist eine einfache Funktion

$$p: [x_0, x_n] \to \mathbb{R}, \quad p(x_i) = y_i\,, \quad i = 0, 1, \cdots, n\,.$$

Man sagt dann p interpoliert die Daten (x_i, y_i), $i = 0, 1, \cdots, n$.
Wir beschränken uns hier auf polynomiale Interpolation.

Lagrangesche Darstellung des Interpolationsploynoms

Für die **Lagrange Polynome**

$$L_j(x) := \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

gilt

$$L_j(x_i) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j\,, \\ 1 & i = j. \end{cases}, \qquad L_j(x_i)y_j = \begin{cases} 0 & i \neq j\,, \\ y_j & i = j. \end{cases}$$

Das eindeutige Interpolationspolynom zu den Daten (x_i, y_i), $i = 0, 1, \cdots, n$ ist

$$\boxed{p_n(x) := \sum_{j=0}^{n} L_j(x)\, y_j}$$

Beispiele:

a) Zu den Daten

x_k	-1	0	1
y_k	2	0	2

erhält man

$$L_0(x) =$$

$$L_0(x_0) =$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} =$$

$$L_2(x) = \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \tfrac{1}{2}x(x + 1)$$

$$p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 =$$

b) Daten: (-1,-2),(0,0),(1,2). Gleiche $x-$Werte wie in a) andere $y-$Werte

Mit den gleichen Lagrangepolynomen wie oben gilt:

$p_2(x) =$

Beobachtungen:

- Das Interpolationspolynom hat nicht immer den höchsten zulässigen Grad!

- Falls immer gleiche Stützstellen x_i, nur verschiedene y_i : Lagrangsche Darstellung angenehm.

c) Zusätzlich das Datenpaar (2, 5) für b) $\longrightarrow$ komplett neu rechnen

Dieses Problem vermeidet man mit der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms.

Newton Interpolationsformel :

Das eindeutige Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \cdots, n$,
$i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$ hat die Form

$$\boxed{p(x) := \sum_{k=0}^{n} [y_0 \cdots y_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)\,.}$$

mit

$$\boxed{[y_i \cdots y_k] := \frac{[y_{i+1} \cdots y_k] - [y_i, \cdots, y_{k-1}]}{x_k - x_i}, \qquad [y_i] = y_i\,.}$$

Mit der neuen Darstellung erhält man in Teil b)

j	x_j	$y_j = [y_j]$	$[y_{j-1}y_j]$	$[y_{j-2}y_{j-1}y_j]$
0	-1	$-2 = [y_0]$		
			$[y_0y_1] =$	
1	0	$0 = [y_1]$		$[y_0y_1y_2] =$
			$[y_1y_2] =$	
2	1	$2 = [y_2]$		

und damit $\quad p_2(x) =$

Ein zusätzliches Datenpaar, wie (2, 5) aus c), wird einfach angehängt!

x_j	$y_j = [y_j]$	$[y_{j-1}y_j]$	$[y_{j-2}y_{j-1}y_j]$	
-1	$-2 = [y_0]$			
		$[y_0y_1] = 2$		
0	$0 = [y_1]$		$[y_0y_1y_2] = 0$	
		$[y_1y_2] = 2$		$[y_0y_1y_2y_3] =$
1	$2 = [y_2]$		$[y_1y_2y_3] =$	
		$[y_2y_3] =$		
2	$5 = [y_3]$			

$p_3(x) =$

SATZ : Fehler der Interpolation

Seien: $f \in C^{n+1}[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

und $x \in [a,b]$.

Dann gilt für das eindeutige Interpolationspolynom $p \in \Pi_n$ mit

$p(x_i) = f(x_i),\ i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$: Es gibt ein $\xi = \xi(x)$ in $[a,b]$, so dass

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)$$

wobei

$$\omega(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \; =$$

Beispiel 1: (Klausur 04/05, Oberle/Kiani) Von einer Funktion $y = f(x)$ seien die folgenden Daten gegeben:

x_k	-2	-1	0	2
y_k	1	2	3	1

Geben Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_3 dritten Grades in der Newtonschen Darstellung an (dividierte Differenzen!), berechnen Sie $p_3(1)$ und schätzen Sie den Interpolationsfehler $|p_3(1) - f(1)|$ nach oben ab, wobei vorausgesetzt werde, dass $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 2$ für alle $x \in [-2, 2]$ gilt.

j	x_j	$y_j = [y_j]$	$[y_{j-1}y_j]$	$[y_{j-2}y_{j-1}y_j]$	
0	-2	$1 = [y_0]$			
			$[y_0y_1] =$		
1	-1	$2 = [y_1]$		$[y_0y_1y_2] =$	
			$[y_1y_2] =$		$[y_0y_1$
2	0	$3 = [y_2]$		$[y_1y_2y_3] =$	
			$[y_2y_3] =$		
3	2	$1 = [y_3]$			

und damit $p_3(x) =$

also $p_3(1) = 1 + 3 - 1 = 3$

Fehlerabschätzung: Es gibt $\xi \in (-2, 2)$ mit

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 2$

Tipps zur Aufgabe 3:

Beispiel 2) Gegeben sei die Wertetabelle:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$\ln(x)$	0.000000	0.09531018	0.18232156	0.26236426	0.33647224

Gesucht: Näherung für den Wert von $\ln(1.25)$ mit einem gesicherten absoluten Fehler von höchstens 10^{-4}

Zur Hand: Taschenrechner mit $+, -, *, /$ aber kein $\ln, \exp,$

Lösung: Wir versuchen unser Glück mit der linearen Interpolation. Eine apriori Fehlerabschätzung ergibt:

$$
\begin{aligned}
|\ln(1.25) - p_1(1.25)| &\leq \left| \frac{f''(\tau)}{2!}(1.25 - 1.2)(1.25 - 1.3) \right| \\
&\leq
\end{aligned}
$$

Das reicht leider nicht. Bei Approximation mit einem quadratischen Polynom p_2 zu den Daten zu $x = 1.2,\ 1.3,\ 1.4$:

$$|\ln(1.25) - p_2(1.25)| \leq \left|\frac{f'''(\tau)}{3!}(1.25-1.2)(1.25-1.3)(1.25-1.4)\right|$$
$$\leq$$

1.2	0.18232156		
1.3	0.26236426	0.80042708	
1.4	0.33647224	0.74107972	−0.29673678

$$\ln(1.25) \approx 0.18232156 + 0.80042708(1.25-1.2)$$
$$- 0.29673678(1.25-1.3)(1.25-1.2) = 0.22308476$$

Matlab liefert $\ln(1.25) = 0.22314355131421$

und damit den Fehler $-5.87953642097738e - 005$.

Tipp zur Aufgabe 4b: