Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani Sose 2020

Hörsaalübung zu Blatt 2 Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Konvergenz von Funktionenfolgen, Potenzreihen

04/05.05.2020

Ablauf Übngsbetrieb:

Ungerade Vorlesungswochen:
Mo/Di Hörsaalübung
Studierende bearbeiten die Hausaufgaben selbstständig.

Gerade Vorlesungswochen:
Studierende können Fragen, die bei der Bearbeitung auftauchen mit den Gruppenleitenden besprechen.
Die Aufgaben werden NICHT in den einzelnen Slots vorgerechnet. Im ersten Semester wurden die Aufgaben auch nicht vorgerechnet.
Studierende können Ihre Ausarbeitungen elektronisch an die Korrekteure übermitteln. Deadline: Freitag 17:00 Uhr.
Freitag nach 17 Uhr: Videos werden hochgeladen in denen die Aufgaben Schritt für Schritt gelöst werden.

Konvergenz von Funktionenfolgen

Reelle **Funktionenfolgen:** wie Zahlenfolgen. Jedem $k \in \mathbb{N}$ wird eine Funktion $f_k : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ zugeordnet.

$$(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{oder auch nur} \qquad (f_k)\ .$$

Beispiel: $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = 2x^k + 1\,.$

Definition: Eine Funktionenfolge (f_k) auf D **konvergiert punktweise** gegen die **Grenzfunktion** f, wenn

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in D}$$

Nachteil:

Definition: Gegeben beschränkte Funktionen $g,\ f : D \to \mathbb{R}$.

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|$$

heißt **Supremumsnorm** von f auf D.

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x) - g(x)|$$

ist der zugehörige **Abstand** von f und g.

Definition: Eine Funktionenfolge (f_k) auf D **konvergiert gleichmäßig** gegen die **Grenzfunktion** f, wenn

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_\infty = 0 \iff \\ &\qquad\qquad \forall\epsilon > 0 : \exists N_0(\epsilon) : \|f - f_k\|_\infty < \epsilon \quad \forall\, k \geq N_0(\epsilon)\end{aligned}}$$

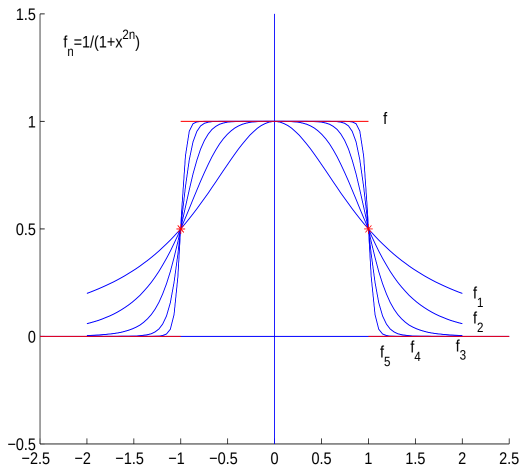
D.h. für beliebig kleines $\epsilon > 0$ gibt es einen Index N_0, so dass alle Funktionen f_k mit höherem Index k als N_0 in einem $\epsilon-$Schlauch um f verlaufen.

<u>**Bei gleichmäßiger Konvergenz:**</u> Folge stetiger Funktionen konvergiert gegen eine stetige Grenzfunktion.

Beispiele:

- $$f_k(x) := \frac{1}{1+x^{2k}}, \qquad k \in \mathbb{N}\,, \quad D = [-2,2].$$

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = \pm 1 \\ 0 & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$$



$f_k \to f$ pktweise, nicht gleichmäßig!

- $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{1+k+kx}{k^2}$.

  Punktweise: x fest!

  $$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1+k+kx}{k^2}$$

  (f_k) konvergiert also punktweise gegen $f =$

  Ist die Konvergenz gleichmäßig?

  $$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x) - 0|$$

- $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin(\frac{x^2}{n^2+1})\,.$

  konvergiert gleichmäßig gegen $f = 0$, denn

  $\|f_n - f\|_\infty \,=$

- $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \cos((nx^2+1)\pi)\,.$

Vorgehen/Rezept

Funktionenreihen : Analog zu Zahlenreihen. Bei gegebener Folge $f_k : D \to \mathbb{R}$ bilde Folge der Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Schreibweise: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ oder nur $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Reihe heißt punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Folge (s_n) der Partialsummen.

NEU: Majorantenkriterium

Gilt $\|f_k\|_\infty \leq a_k$

und ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig und absolut konvergent.

Sätze gelten analog: Zum Beispiel

Stetigkeit

Notwendige Bedingung

Bei gleichmäßiger Konvergenz:

Stetigkeit bleibt erhalten, Vertauschbarkeit von Differentiation/Integration mit Summenbildung (Details: siehe Vorlesung)

Beispiele:

- $s_n : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}\,, \qquad s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-\sin(x)}{4}\right)^k,$

- $q_n \; : \; [0, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R} \, , \qquad q_n(x) \; := \; \sum_{k=0}^{n} \frac{x(1-x)^k)}{x^2+1}$

- $g_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi + x)}{3^k}$

- $\hat{g}_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \hat{g}_n(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi + x)}{k^2}$

- $\tilde{g}_n \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \tilde{g}_n(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k\pi + x)}{k + 2}$

Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \qquad x_0,\ a_k \in \mathbb{R}\,.$$

$x_0 =$ Entwicklungspunkt.
Die Partialsummen von Potenzreihen sind Polynome.
Beispiel: Taylorreihen/Taylorpolynome.

SATZ :

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gibt es einen Konvergenzradius $r \geq 0$ mit

- Die Potenzreihe konvergiert punktweise im offenen Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$. Die Konvergenz ist in jedem kompakten Teilintervall von $(x_0 - r, x_0 + r)$ gleichmäßig.

- Die Potenzreihe divergiert außerhalb von $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Bemerkung :
$r = 0 \implies$ Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$.
$r = \infty \implies$ Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

r heißt **Konvergenzradius** der Reihe. Formel von CAUCHY, HADAMARD

$$\boxed{r := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

$$\limsup b_k = \begin{cases} \text{größter Häufungspunkt der Folge} & \text{falls diese beschränkt ist,} \\ \infty & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k \neq 0\,,\ \forall k \geq k_0$ gilt

$$\boxed{r := \lim_{k\to\infty, k\geq k_0} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

Bemerkungen:

- In den Randpunkten $x_0 - r$ und $x_0 + r$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Siehe Beispiel.

- Potenzreihen können innerhalb ihres Konvergenzintervalles gliedweise integriert und differenziert werden.

BEISPIELE:

- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(x-1)^k .$$

  Konvergenzradius $r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k^2} \cdot \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} =$

  Konvergenz in $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ und Divergenz für $|x-1| > \frac{1}{2}$.

  Randpunkte: $x_1 = \frac{1}{2}$ bzw. $x_2 = \frac{3}{2}$

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(\frac{1}{2}-1)^k =$$

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(\frac{3}{2}-1)^k =$$

Konvergenzbereich/Konvergezintervall:

Alternativ: $r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = 2$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^k\right)^k x^k . \qquad x_0 =$

$$a_k = \begin{cases} (3+1)^k = 4^k & k \text{ gerade,} \\ (3-1)^k = 2^k & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \begin{cases} \dfrac{4^k}{2^{k+1}} = & k \text{ gerade,} \\ \dfrac{2^k}{4^{k+1}} = & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| =$$

$$a_k = \begin{cases} (3+1)^k = 4^k & k \text{ gerade}, \\ (3-1)^k = 2^k & k \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \sqrt[k]{4^k} \ = \ 4 & k \text{ gerade}, \\ \sqrt[k]{2^k} \ = \ 2 & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

$$r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} =$$

Konvergenz in $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ und Divergenz für $|x| > \frac{1}{4}$.

Randpunkte: $x = \pm\frac{1}{4}$:

Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^k\right)^k x^k$.

Summand mit geradem Index $k = 2l$:

$$a_{2l} \left(\pm\frac{1}{4}\right)^{2l} = 4^{2l} \left(\frac{1}{4}\right)^{2l}$$

Die Summanden konvergieren für die Randpunkte nicht gegen Null. Notwendiges Kriterium für die Konvergenz der Reihe verletzt. Keine Konvergenz in den Randpunkten!!

Einige Techniken zur Berechnung von Potenzreihen :

- Geometrische Reihe

- Bekannte (Taylor-)Reihen

- Integration/Differentiation

- ....

Geometrische Reihe: $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \forall\, |q| < 1}$$

BEISPIEL 1) $x_0 = 0$

$$\frac{5}{3-8x} =$$

Geometrische Reihe mit $q = \frac{8}{3}x$. D.h. Konvergenz genau dann wenn

$\left|\frac{8}{3}x\right| < 1 \iff |x| < \frac{3}{8}$.

Taylorpolynom $n-$ten Grades gesucht:

Taylor-Reihe (falls existent) $=$ Potenzreihe

$$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 8^k}{3^{k+1}} \cdot x^k$$

Taylor-Polynom: $T_n(x; x_0) =$

z.B. $T_3(x; 0) =$

$$T_3(x; 0) = \tfrac{5}{3}\left(1 + \tfrac{8}{3}x + \tfrac{64}{9}x^2 + \tfrac{512}{27}x^3\right)$$

BEISPIEL 2) $\dfrac{5}{3-8x} = ?$ $\qquad x_0 = 1\,.$ $\qquad$ Ziel : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$

Erzeuge statt $x-$Potenzen $(x-1)-$Potenzen!

$$\frac{5}{3-8x} =$$

Geometrische Reihe mit $q = -\frac{8}{5}(x-1)$.

D.h. Konvergenz genau dann wenn

$$\left|\tfrac{8}{5}(x-1)\right| < 1 \iff |x-1| < \tfrac{5}{8} \iff 1 - \tfrac{5}{8} < x < 1 + \tfrac{5}{8}$$

BEISPIEL 3) $\dfrac{8x}{x^2-4} =?$ $\quad x_0 = 0\,.$ Ziel:

$$\frac{8x}{x^2-4} = 8x\left(\frac{1}{x^2-4}\right) =$$

Taylorpolynom 3. Grades mit $x_0 = 0$: