Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

Sose 2020

Hörsaalübung zu Blatt 1 Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Fixpunktverfahren,
Kurvendiskussion
20/21.04.2020

Banachscher Fixpunktsatz, Fixpunktverfahren

Situation :

Zu lösen: Gleichung(ssystem) $k(x) = q(x)$

Standardisieren für Rechner:

$!$ Nullstellenproblem: $k(x) \quad q(x) =: g(x) = 0$

$!$ Fixpunktaufgabe: $f(x) = x$

Definitionen : für $f : [a; b] \quad ! \quad \mathrm{R}$

Fixpunktgleichung: $\boxed{x = f(x)}$

Lösung $\hat{x}$ heißt **Fixpunkt von** f.

f heißt **selbstabbildend** (auf $[a; b]$), wenn $f([a; b]) \qquad [a; b]$.

f heißt **kontrahierend** auf $[a; b]$ mit **Kontraktionszahl**
$L < 1 \quad (\ )$

$$j f(x) \qquad f(y) j \qquad L \quad jx \qquad yj \quad 8 x; y \ 2 \ [a; b]$$

Für eine C^1 Funktion f liefert der MWS:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y| \quad \text{mit einem } \xi \in]x,y[$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x, y \in [a,b]:$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \max\{|f'(\xi)| : \xi \in [a,b]\}\,|x - y|$$

Bei einer auf $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktion kann also

$$\boxed{L := \max\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}}$$

als Kontraktionszahl gewählt werden falls $L < 1$ gilt.

Banachscher Fixpunktsatz für Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $f:[a;b] \to \mathbb{R}$

- f Selbsabbildung auf $[a;b]$,
- f kontrahierend auf $[a;b]$ mit Kontraktionszahl L

$\Longrightarrow \; \exists!\, x^* \in [a;b]$ mit $f(x^*) = x^*$

Die Iteration

$$\boxed{x_{n+1} := f(x_n)}$$

konvergiert ausgehend von jedem Startwert $x_0 \in [a;b]$ gegen eindeutigen Fixpunkt x^*.

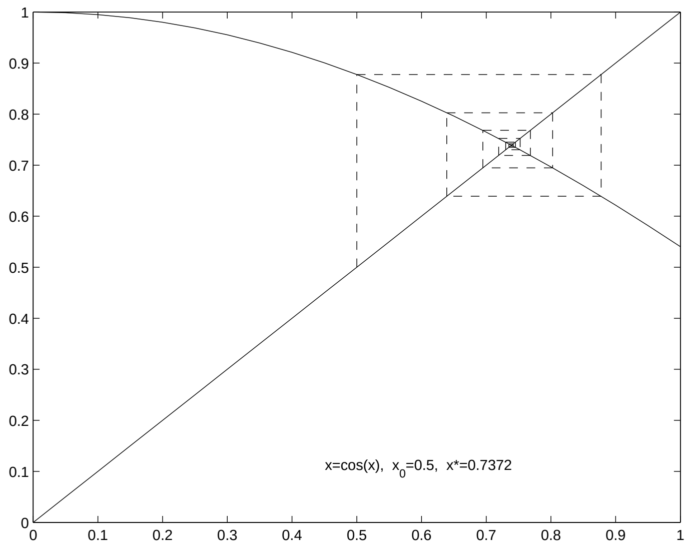
Es gelten die Fehlerabschätzungen:

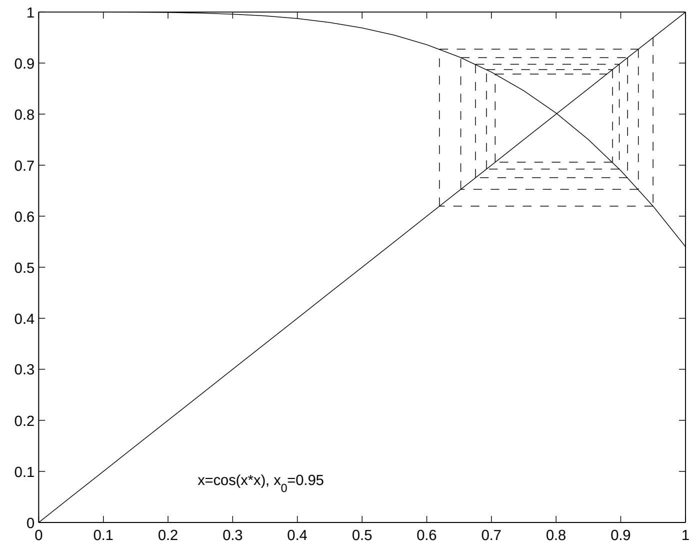
$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \qquad \text{a priori Abschätzung}$$

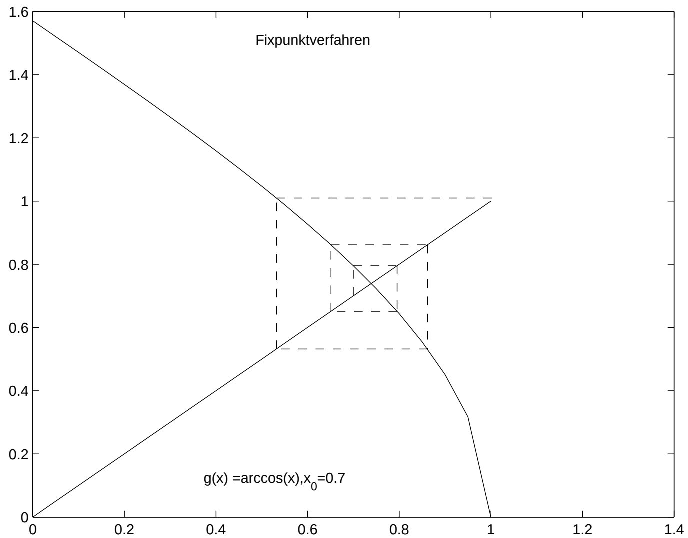
$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \qquad \text{a posteriori Abschätzung}$$

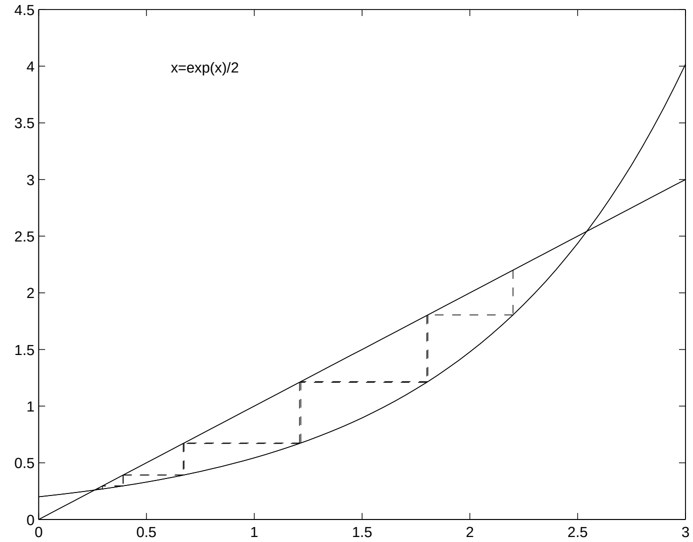
Frage: Kann man denn nicht ohne den ganzen Kram los rechnen?

BEISPIELE:


x=cos(x), x0=0.5, x*=0.7372


x=cos(x*x), x0=0.95


Fixpunktverfahren
g(x) =arccos(x),x0=0.7


x=exp(x)/2

Überprüfung der Selbstabbildungseigenschaft:

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Bestimme $f'(x)$.

1.Fall) $f'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [a;b]$
f ist monoton. Es genügt $f(a); f(b) \in [a;b]$.

2.Fall) $f'(x) = 0$ für ein(ige) $x \in [a;b]$
f hat möglicherweise Extrema in [a,b].
Bestimme die Nullstellen $x_1; \ldots ; x_k$ von f'
Es genügt $f(x_1); \ldots ; f(x_k); f(a); f(b) \in [a;b]$.

Überprüfung der Kontraktion: $f : [a;b] \to [a;b]$ stetig diffb.

$$\boxed{L := \max \{|f'(x)| : x \in [a;b]\} < 1 \ ?}$$

Beispiel: (modifizierte Klausuraufgabe 1a, Struckmeier/Kiani, 06/07)

Gesucht sei eine Nullstelle $x \in I := [1, 2]$ der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

a) Schreiben Sie das Problem in eine Fixpunktaufgabe $f(x) = x$ um. Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (BFS) auf $I = [1, 2]$.

b) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Schritt des Fixpunktverfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ durch und zeigen Sie, dass der absolute Fehler nach einer Iteration durch 0.5 beschränkt ist. Das heißt:

$$|x_1 - x| \leq 0.5$$

c) Gesucht: obere Schranke für den relativen Fehler $\dfrac{x_1 \quad x}{x}$.

Zusatz: Nach wie vielen Schritten gilt sicher $jx_n \quad x\ j < 0{:}01$.

Lösung:

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 \quad \frac{1}{2}x^2 \quad \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0 \quad (\ ) \quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = x$$

Prüfe Voraussetzungen des BFS für f auf $I := [1; 2]$.

Schritt 1) f^0 berechnen:

$$f^0(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad x^2 \quad 2x + \frac{3}{2}$$

Schritt 2) Vorzeichen $f^{0}(x)$ auf I

– hat f^{0} Nullstellen?

$$f^{0}((x) = 0 \quad (\;) \quad x^2 \qquad 2x + \frac{3}{2} = 0$$

Quadratische Ergänzung

$$x^2 \qquad 2x + \frac{3}{2} =$$

Schritt 3) $f(x)$ für Randpunkte und Nullstellen von f^{0} berechnen:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$f(1) = \frac{1}{6} \;\; 1^3 \quad \frac{1}{2} \;\; 1^2 + \frac{3}{4} \;\; 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{6} \;\; 2^3 \quad \frac{1}{2} \;\; 2^2 + \frac{3}{4} \;\; 2 + \frac{3}{4} = \frac{19}{12}$$

UND f ist monoton

Schritt 4) Kontraktion prüfen: Maximum $|f'(x)|$ auf I

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \frac{1}{4}$$

Wer (noch) keine quadratische Ergänzung kann, rechnet:

$f''(x) =$

$$f'(1) = \frac{1}{4};\ f'(2) = \frac{3}{4}$$

UND f' ist monoton

Also $f'(x) \in [\frac{1}{4}; \frac{3}{4}] \quad \forall x \in I \Rightarrow$

f ist auf I kontrahierend mit der Kontaktionszahl $L =$

b) Einen Schritt mit $x_0 = 1$ ausführen und Fehler:

$$x_{n+1} \quad = \quad f(x_n) = \tfrac{1}{6}x_n^3 \quad \tfrac{1}{2}x_n^2 + \tfrac{3}{4}x_n + \tfrac{3}{4}$$

$$jx_n \qquad x\ j \qquad \frac{L}{1 \quad L} jx_n \qquad x_{n\ \ 1}j$$

Also $\qquad x_1 = f(x_0) = f(1) = \tfrac{7}{6}$

und $\qquad jx_1 \quad x\ j \quad \frac{L}{1 \quad L} jx_1 \quad x_0 j =$

c) Relativer Fehler $= \dfrac{\text{absoluter Fehler}}{\text{Betrag der exkten Lösung}}$

$$\frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{untere Schranke für den Betrag der exkten Lösung}}$$

Hier $jx\ j \quad 1$ (wegen Monotonie sogar $jx\ j \quad x_1$):

$$\frac{|x_1 \quad x \;|}{|x \;|} \qquad \frac{|x_1 \quad x \;|}{1} = \frac{1}{2} \qquad .$$

Zusatz: Nach wie vielen Schritten gilt sicher $|x_n \quad x \;| < 0.01$?

Es gilt die a priori Abschätzung

$$|x_n \quad x \;| \qquad \frac{L^n}{1 \quad L}|x_1 \quad x_0| \;=\; \frac{(\frac{3}{4})^n}{1 \quad \frac{3}{4}}(\tfrac{1}{6})$$

Wir sorgen dafür, dass der Ausdruck rechts kleiner als 0.01 wird.

$$(\tfrac{3}{4})^n \, \tfrac{4}{1}\,\tfrac{1}{6} \;<\; 0.01 \quad (\;) \quad (\tfrac{3}{4})^n \;<\; \tfrac{1}{100}\,\tfrac{3}{2} \quad (\;) \quad n \ln(0.75) \;<\; \ln(3/200)$$

$$(\;) \quad n \;>\; \frac{\ln(3/200)}{\ln(0.75)} \;=\; \frac{4.1997}{0.2876} \;=\; 14. \qquad .$$

Beispiel 2)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) = x\sin(x) + \cos(x) \quad \frac{}{4}\sin(x)$$

genau einen Fixpunkt x im Intervall $I = [0; \frac{}{2}]$ besitzt. Überprüfen Sie dazu die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

b) Berechnen Sie x_4 mit dem Startwert $x_0 = \frac{}{4}$. Machen Sie eine a priori und eine a posteriori Fehlerabschätzung und zeigen Sie

$$jx_4 \quad x\ j \qquad 4\ \ 10^{\ \ 5} \qquad \text{und} \qquad \frac{jx_4 \quad x\ j}{jx\ j} \qquad 5\ \ 10^{\ \ 5}$$

Lösung: $g(x) \;=\; x\sin(x) + \cos(x) \quad \frac{}{4}\sin(x)$

a) Überprüfen Voraussetzungen des BFS

Selbstabbildung:

$g(0) = 1 \;\, 2 \;\, I; \qquad g(\frac{}{2}) = \frac{}{4} \;\, 2 \;\, I:$

Das ist notwendig, aber nicht hinreichend!

Prüfen Monotonie–Verhalten von g.

$g^{0}(x) \;=$

$g^{0}(x) \;=\; (x \quad \frac{}{4})\cos(x) = 0$ im Intervall?

Eine Nullstelle der Ableitung liegt also im Inneren des Intervalls $I \;=\; [0; \frac{}{2}]$. Hier kann ein Minimum oder ein Maximum der Funktion vorliegen. Man rechnet nach

$$g(x) \;=\; x\sin(x) + \cos(x) \qquad \tfrac{}{4}\sin(x)$$

$$g(\tfrac{}{4}) \;=$$

Weitere Minima oder Maxima können im Intervall I nicht existieren. Nach den obigen Untersuchungen folgt aus

$g(0); g(\tfrac{}{4}); g(\tfrac{}{2})\;\; 2\; I \;\; =)\;\; g$ bildet das Intervall I in sich ab.

Kontraktion: Auf unserem Intervall gilt sicher

$$jg^0(x)j \;=\; (x \quad \frac{}{4})\cos(x) \qquad\quad x \quad \frac{}{4} \qquad \frac{}{4} \;<\; 0{:}8 \;=:\; L$$

g ist also kontrahierend auf I mit der Kontraktionszahl $L := 0{:}8$.

Die Voraussetzungen des BFS sind also erfüllt. Es gibt daher genau einen Fixpunkt in I.

b) x_4 und Fehlerabschätzung

Für den Startwert $x_0 = \frac{\pi}{4}$ gilt

$x_1 = g(x_0) = \sqrt{2}/2 \Rightarrow |x_0 - x_1| < 0.8 - 0.7 = 0.1$.

Damit erhalten wir die apriori Abschätzung

$$|x_4 - x^*| \le \frac{L^4}{1-L}|x_1 - x_0| \le \frac{0.8^4}{0.2}\,0.1 = 0.64 \cdot 0.8 \cdot 0.4 = 0.2048$$

Oder mit einem Taschenrechner

$$|x_4 - x^*| \le \frac{(\frac{\pi}{4})^4}{1-\frac{\pi}{4}}\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right| = 0.1388\ldots$$

Weiter führt man vier Schritte der Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ z.B. mit Matlab oder einem Taschenrechner aus:

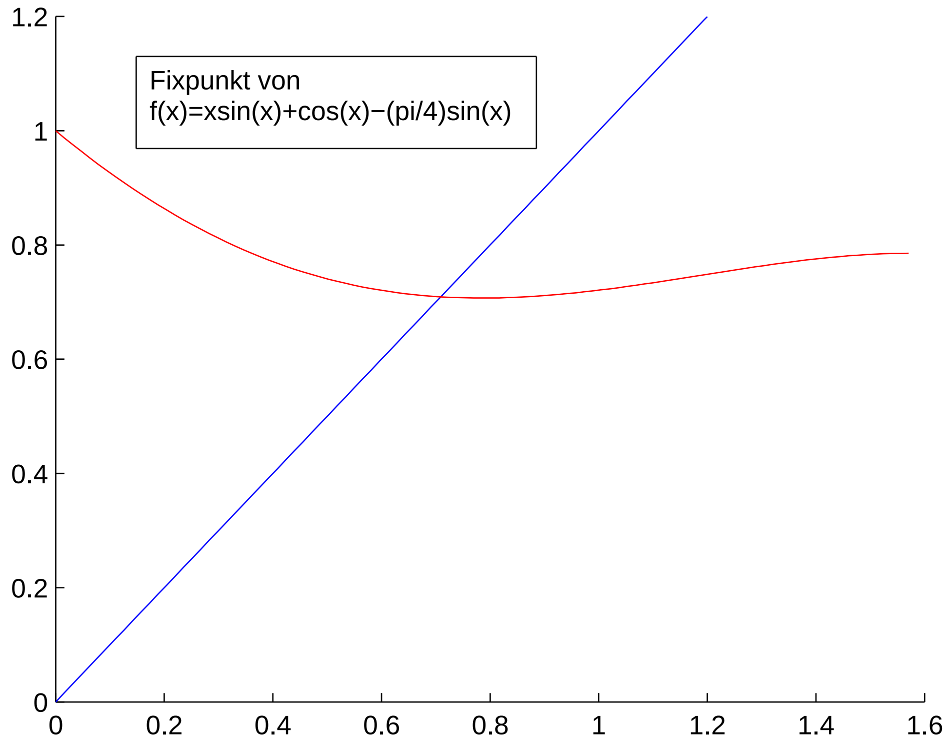
```
function fixpkt1
axis([0 1.6  0 1.2])
hold on
format long
t=linspace(0,pi/2,101);
plot(t,t);
y=(t-pi/4).*sin(t)+cos(t);
plot(t,y,'r')

x(1)=pi/4
for i=2:1:5
    x(i)=(x(i-1)-pi/4).*sin(x(i-1))+cos(x(i-1))
end;
```

Ergebnis: $x =$

0:785398163397448; 0:707106781186548; 0:709383623179793

0:709250204125545; 0:709257906538643:



A posteriori Abschätzung:

$$A := |x_4 \quad x \ | \quad \frac{L}{1 \quad L} |x_4 \quad x_3|$$

$$< \frac{0.8}{1 \quad 0.8} |0.709258 \quad 0.709250| = 4 \quad 0.000008$$

Relativer Fehler $\frac{|x_4 \quad x \ |}{|x \ |}$

Als untere Schranke für $|x \ |$ kann hier nicht die linke Intervallgrenze gewählt werden! Warum?

Aber $x_4 \quad A \qquad 0.709257 \quad 0.000032 = 0.709225 > 0.7 =: us.$

Für den relativen Fehler erhält man

$$\frac{|x_4 \quad x \ |}{|x \ |} \quad \frac{A}{|x \ |} \quad \frac{A}{us} = \frac{32 \quad 10^{\ 6}}{7 \quad 10^{\ 1}} < 5 \quad 10^{\ 5}$$

Kurvendiskussion

Gegeben sei eine Rechenvorschrift $y = f(x)$. Zu klären sind oft folgende Punkte:

(Maximaler) Definitionsbereich $= D \subseteq \mathbb{R}$,

asymptotisches Verhalten ($x \to \pm\infty$), Pole ($f(x) \to \pm\infty$) etc.

Eine Funkion $f : D \to \mathbb{R};\ D \subseteq \mathbb{R}$ hat im Punkt $x_0 \in D'$ einen **Pol**, wenn es eine in x_0 stetige Funktion g gibt, so dass

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}; \quad g(x_0) \neq 0$$

gilt.

Für gerade (ungerade) k : Pol ohne (mit) Vorzeichenwechsel.

Eine Gerade $g(x) := ax + b$ mit

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

heißt **Asymptote** von f für $x \to \infty$. Im Falle der Existenz einer solchen Geraden gilt

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) .$$

Nullstellen

Lokale Extrema, Monotonie im Inneren von D wo f diff.bar

Minimum: $\Longleftarrow f'(x) = 0; f''(x) > 0$

Maximum: $\Longleftarrow f'(x) = 0; f''(x) < 0$

Monoton fallend: $(\;)$

$(x_2 > x_1 =) \;\; f(x_2) \quad\; f(x_1)) \;\; (\;) \;\; f'(x) \quad\; 0$

Monoton steigend: $(\;)$

$(x_2 > x_1 =) \;\; f(x_2) \quad\; f(x_1)) \;\; (\;) \;\; f'(x) \quad\; 0$

Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in (a,b). Dann heißt f **konvex (konkav)**, wenn

$$\forall x \in (a, b) : \quad f''(x) \quad (\quad) \, 0$$

gilt.

Der Graph einer kovexen (konkaven) Funktion liegt oberhalb (unterhalb) seiner Tangenten.

$x_0 \in (a;b)$ heißt **Wendepunkt** von f, wenn sich das Konvexitätsverhalten von f in x_0 ändert. Genauer:

$\exists\, \delta > 0$: f ist konvex (konkav) für $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ und konkav (konvex) für $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Ist f eine C^3-Funktion, so gilt:

x_0 Wendepunkt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$,

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) > 0$
$\Rightarrow$ x_0 Wendepunkt, **Rechts-Linkskurve**,

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) < 0$
$\Rightarrow$ x_0 Wendepunkt, **Links-Rechtskurve**.

Symmetrien

Die Funktion f ist **gerade** d.h. der Graph ist **achsensymmetrisch zur y-Achse** , genau dann wenn

$$\forall x : f(-x) = f(x)$$

Die Funktion f ist **ungerade** d.h. der Graph ist **punktsymmetrisch zum Nullpunkt** , genau dann wenn

$$\forall x : f(-x) = -f(x)$$

Bildbereich

Evtl. Skizze

Beispiel, Aufgabe 5 Blatt 7h Wise 19/20:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) = \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right).$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$

e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen

Sie die Extrema von f. **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.

Lösung: $f(x) = \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right).$

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \infty \implies \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

d) Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen.

e) Da die Exponentialfunktion streng monoton steigt, genügt es das Monotonieverhalten von $h(x) := \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ zu untersuchen.

$h'(x) =$

$$f'(x) = h'(x) \exp\left(\frac{2x - 1}{(x - 1)^2}\right) = \frac{-2x}{(x - 1)^3} \exp\left(\frac{2x - 1}{(x - 1)^2}\right)$$

Die einzige Nullstelle der Ableitung liegt für $x_0 = 0$ vor.

f kann das Monotonieverhalten nur in x_0 und/oder an der Definitionslücke ändern.

Es gilt: f' hat das gleiche Vorzeichen wie h', wobei

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$h'(x) \begin{cases} < 0 & \forall x \in \left]-\infty; 0\right] \Rightarrow f \text{ fällt streng monoton in } \left]-\infty; 0\right[\\ > 0 & \forall x \in \left]0; 1\right[\Rightarrow f \text{ wächst streng monoton in } \left]0; 1\right[\\ < 0 & \forall x \in \left]1; \infty\right[\Rightarrow f \text{ fällt streng monoton in } \left]1; \infty\right[\end{cases}$$

Alternativ: Es gilt:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 & \\
 & \Longrightarrow \; f \text{ fällt streng monoton in }]-\infty;0[\\
f(0) = e^{-1} < 1 & \\
 & \Longrightarrow \; f \text{ steigt streng monoton in }]0;1[\\
\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty & \\
 & \Longrightarrow \; f \text{ fällt streng monoton in }]1;\infty[\\
\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 &
\end{array}\right.$$

Hieraus ergibt sich ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass in $x_0 = 0$ ein Minimum vorliegt.

Zur Klassifikation des Extremums kann man natürlich auch die zweite Ableitung von h berechnen.

$$h''(x) = \frac{2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-2x)}{(x-1)^6}, \qquad h''(0) = 2.$$

Da $h'(0) = 0$ und $h''(0) > 0$ ist, liegt in $x_0 = 0$ ein Minimum (von h und damit von f) vor.

Eine Berechnung von f'' wäre auf jeden Fall zu viel des Aufwands.

f) Aus den oben berechneten Werten und der Stetigkeit von f auf den Intervallen $]-\infty;1[$ und $]1;\infty[$ folgt

$$f(D) = [e^{-1}; \infty[$$

g) Bemerkung: wenn man nicht aufpasst ergibt sich als Bild annähernd eine waagerechte Linie und eine senkrechte Linie bei $x = 1$.

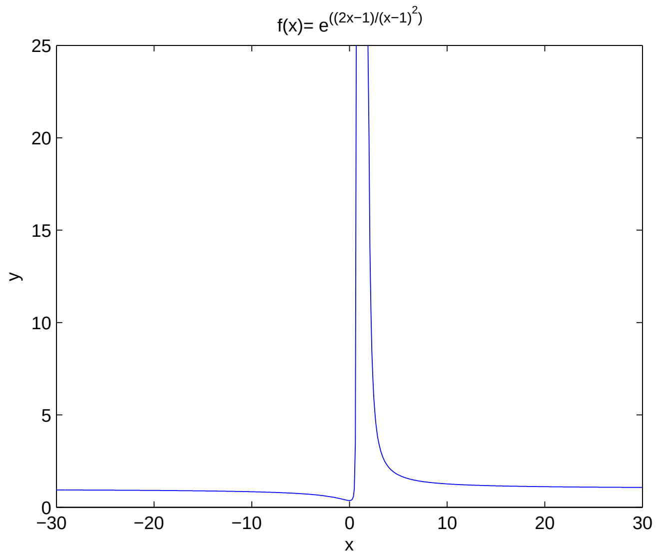


Abbildung 1: Skizze