

Hörsaalübung zu Blatt 1 Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

**Fixpunktverfahren,
Kurvendiskussion
20/21.04.2020**

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!
Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Banachscher Fixpunktsatz, Fixpunktverfahren

Situation :

Zu lösen: Gleichung(ssystem) $k(x) = q(x)$

Standardisieren für Rechner:

\longleftrightarrow Nullstellenproblem: $k(x) - q(x) =: g(x) = 0$

\longleftrightarrow Fixpunktaufgabe: $f(x) = x$

Definitionen : für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- **Fixpunktgleichung:**

$$x = f(x)$$

Lösung \hat{x} heißt **Fixpunkt von** f .

- f heißt **selbstabbildend** (auf $[a, b]$), wenn $f([a, b]) \subset [a, b]$.

- f heißt **kontrahierend** auf $[a, b]$ mit **Kontraktionszahl**
 $L < 1 \iff$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

Für eine C^1 Funktion f liefert der MWS:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\alpha)| |x - y| \quad \text{mit einem } \alpha \in]x, y[$$

$$\implies \forall x, y \in [a, b] :$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \max \{|f'(\psi)| : \psi \in [a, b]\} \cdot |x - y|$$

Bei einer auf $[a, b]$ stetigen, in $]a, b[$ stetig diff.baren Fkt. kann also

$$L := \max \{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$$

als Kontraktionszahl gewählt werden falls $L < 1$ gilt.

Banachscher Fixpunktsatz für Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- f Selbstabbildung auf $[a, b]$,
- f kontrahierend auf $[a, b]$ mit Kontraktionszahl L

$\implies \exists! x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$

Die Iteration

$$x_{n+1} := f(x_n)$$

konvergiert ausgehend von jedem Startwert $x_0 \in [a, b]$ gegen eindeutigen Fixpunkt x^* .

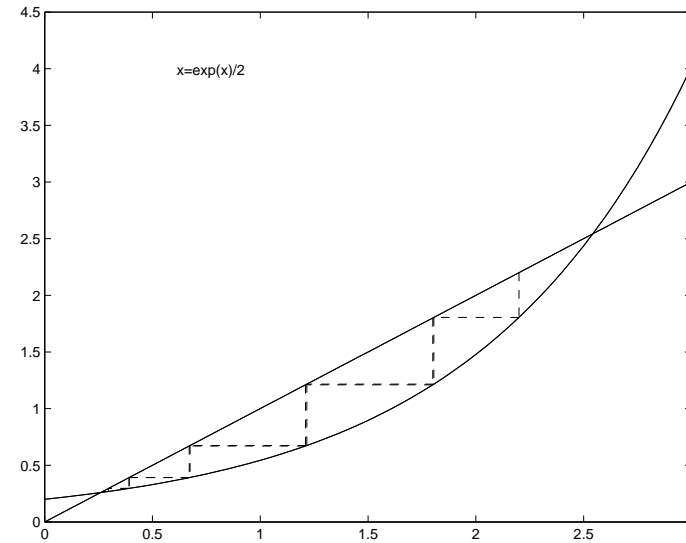
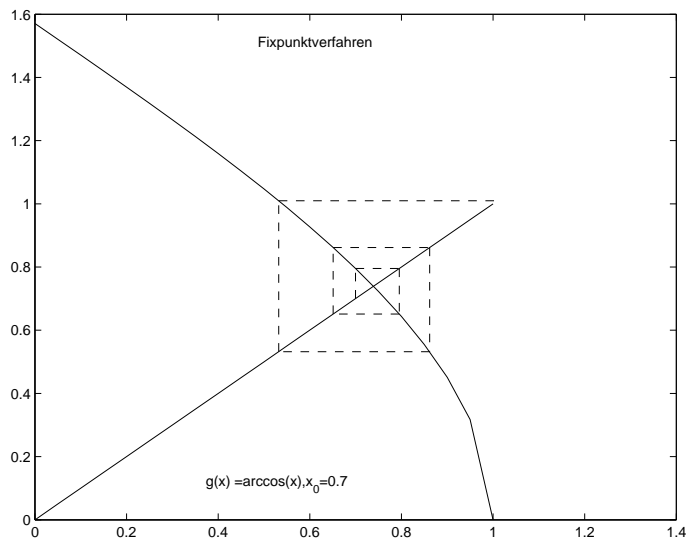
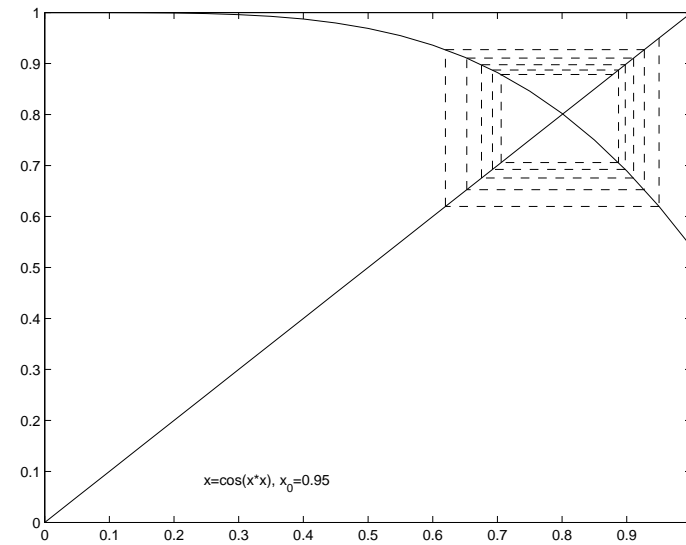
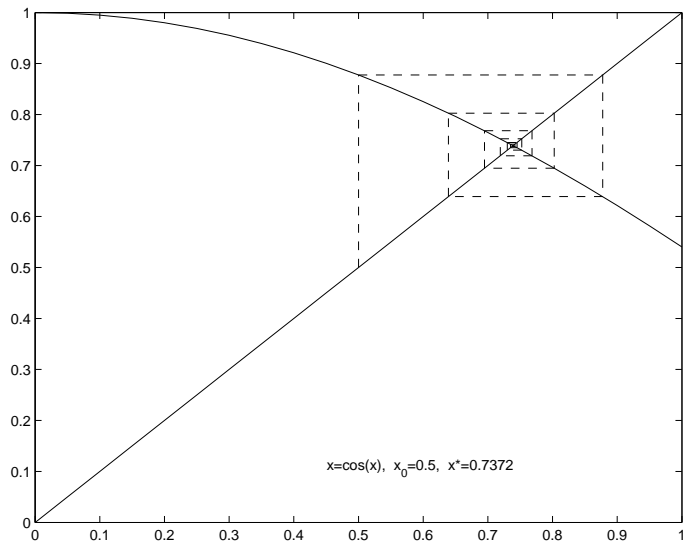
Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \quad \text{a priori Abschätzung}$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \quad \text{a posteriori Abschätzung}$$

Frage: Kann man denn nicht ohne den ganzen Kram los rechnen?

BEISPIELE:



Überprüfung der Selbstabbildungseigenschaft:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar (in den Randpunkten einseitig) . Bestimme $f'(x)$.

1.Fall) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

f ist monoton. Es genügt $f(a), f(b) \in [a, b]$.

2.Fall) $f'(x) = 0$ für ein(ige) $x \in [a, b]$

f hat möglicherweise Extrema in $[a, b]$.

Bestimme die Nullstellen x_1, \dots, x_k von f'

Es genügt $f(x_1), \dots, f(x_k), f(a), f(b) \in [a, b]$.

Überprüfung der Kontraktion: $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig diffb.

$$L := \max \{ |f'(x)| : x \in [a, b] \} < 1 ?$$

Beispiel: (modifizierte Klausuraufgabe 1a, Struckmeier/Kiani, 06/07)

Gesucht sei eine Nullstelle $x^* \in I := [1, 2]$ der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

- a) Schreiben Sie das Problem in eine Fixpunktaufgabe $f(x) = x$ um. Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (BFS) auf $I = [1, 2]$.
- b) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Schritt des Fixpunktverfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ durch und zeigen Sie, dass der absolute Fehler nach einer Iteration durch 0.5 beschränkt ist. Das heißt:

$$|x_1 - x^*| \leq 0.5$$

c) Gesucht: obere Schranke für den relativen Fehler $\left| \frac{x_1 - x^*}{x^*} \right|$.

Zusatz: Nach wie vielen Schritten gilt sicher $|x_n - x^*| < 0.01$.

Lösung:

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0 \iff f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = x$$

Prüfe Voraussetzungen des BFS für f auf $I := [1, 2]$.

Schritt 1) f' berechnen:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left(x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right)$$

Schritt 2) Vorzeichen $f'(x)$ auf I

– hat f' Nullstellen?

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$$

Quadratische Ergänzung

$$x^2 - 2x + \frac{3}{2} =$$

Schritt 3) $f(x)$ für Randpunkte und Nullstellen von f' berechnen:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$f(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} = \frac{19}{12}$$

UND f ist monoton

Schritt 4) Kontraktion prüfen: Maximum $|f'(x)|$ auf I

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \underbrace{(x - 1)^2}_{\geq 0} + \frac{1}{4}$$

Wer (noch) keine quadratische Ergänzung kann, rechnet:

$$f''(x) =$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}, \quad f'(2) = \frac{3}{4}$$

UND f' ist monoton

$$\text{Also } f'(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right] \quad \forall x \in I \implies$$

f ist auf I kontrahierend mit der Kontraktionszahl $L =$

b) Einen Schritt mit $x_0 = 1$ ausführen und Fehler:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{6}x_n^3 - \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{3}{4}x_n + \frac{3}{4}$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Also $x_1 = f(x_0) = f(1) = \frac{7}{6}$

und $|x_1 - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_1 - x_0| =$

c) Relativer Fehler = $\frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{Betrag der exkten Lösung}}$

$$\leq \frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{untere Schranke für den Betrag der exkten Lösung}}$$

Hier $|x^*| \geq 1$ (wegen Monotonie sogar $|x^*| \geq x_1$):

$$\frac{|x_1 - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{|x_1 - x^*|}{1} = \frac{1}{2} \quad .$$

Zusatz: Nach wie vielen Schritten gilt sicher $|x_n - x^*| < 0.01$?

Es gilt die a priori Abschätzung

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \left(\frac{1}{6}\right)$$

Wir sorgen dafür, dass der Ausdruck rechts kleiner als 0.01 wird.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{6} < 0.01 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{100} \cdot \frac{3}{2} \iff n \cdot \ln(0.75) < \ln(3/200)$$

$$\iff n > \frac{\ln(3/200)}{\ln(0.75)} = \frac{-4.1997\dots}{-0.2876\dots} = 14.6\dots$$

Beispiel 2)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) = x \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{4} \sin(x)$$

genau einen Fixpunkt x^* im Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt. Überprüfen Sie dazu die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

b) Berechnen Sie x_4 mit dem Startwert $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Machen Sie eine a priori und eine a posteriori Fehlerabschätzung und zeigen Sie

$$|x_4 - x^*| \leq 4 \cdot 10^{-5} \quad \text{und} \quad \frac{|x_4 - x^*|}{|x^*|} \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

Lösung: $g(x) = x \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{4} \sin(x)$

a) Überprüfen Voraussetzungen des BFS

Selbstabbildung:

$$g(0) = 1 \in I, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \in I.$$

Das ist notwendig, aber nicht hinreichend!

Prüfen Monotonie–Verhalten von g .

$$g'(x) =$$

$$g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(x) = 0 \text{ im Intervall?}$$

Eine Nullstelle der Ableitung liegt also im Inneren des Intervalls $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. Hier kann ein Minimum oder ein Maximum der Funktion vorliegen. Man rechnet nach

$$g(x) = x \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{4} \sin(x)$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

Weitere Minima oder Maxima können im Intervall I nicht existieren. Nach den obigen Untersuchungen folgt aus

$g(0), g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{\pi}{2}\right) \in I \implies g$ bildet das Intervall I in sich ab.

Kontraktion: Auf unserem Intervall gilt sicher

$$|g'(x)| = \left| \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(x) \right| \leq \left| x - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{4} < 0.8 =: L$$

g ist also kontrahierend auf I mit der Kontraktionszahl $L := 0.8$.

Die Voraussetzungen des BFS sind also erfüllt. Es gibt daher genau einen Fixpunkt in I .

b) x_4 und Fehlerabschätzung

Für den Startwert $x_0 = \frac{\pi}{4}$ gilt

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{2}/2 \implies |x_0 - x_1| < 0.8 - 0.7 = 0.1.$$

Damit erhalten wir die a priori Abschätzung

$$|x_4 - x^*| \leq \frac{L^4}{1 - L} |x_1 - x_0| \leq \frac{0.8^4}{0.2} \cdot 0.1 = 0.64 \cdot 0.8 \cdot 0.4 = 0.2048$$

Oder mit einem Taschenrechner

$$|x_4 - x^*| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1 - \frac{\pi}{4}} \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \right| = 0.1388\dots$$

Weiter führt man vier Schritte der Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ z.B. mit Matlab oder einem Taschenrechner aus:

```

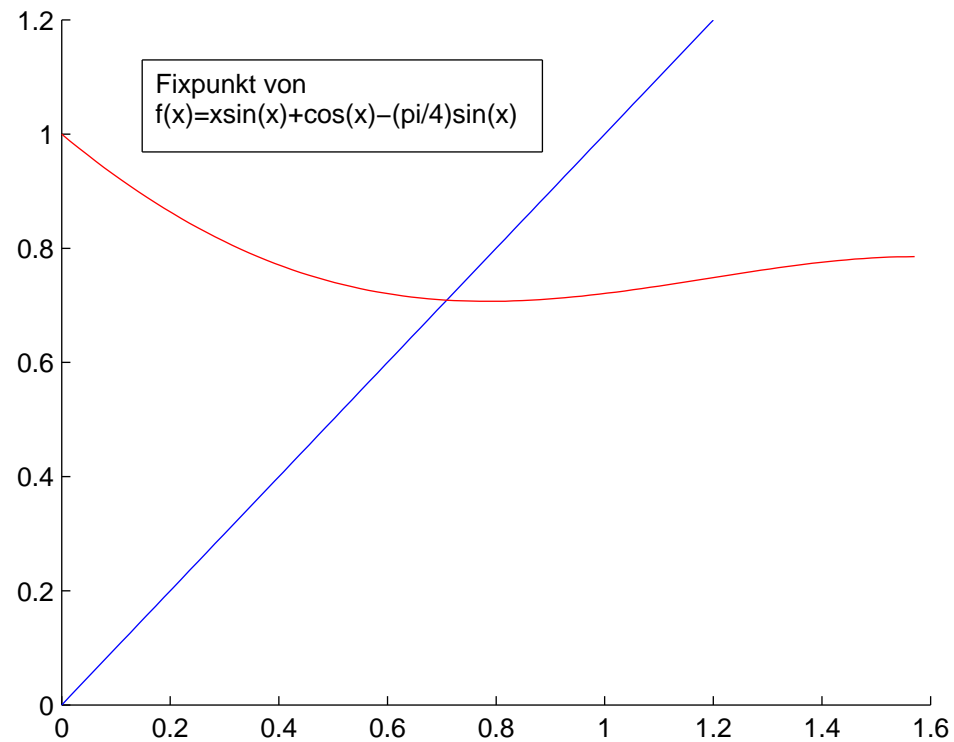
function fixpkt1
axis([0 1.6 0 1.2])
hold on
format long
t=linspace(0,pi/2,101);
plot(t,t);
y=(t-pi/4).*sin(t)+cos(t);
plot(t,y,'r')

x(1)=pi/4
for i=2:1:5
    x(i)=(x(i-1)-pi/4).*sin(x(i-1))+cos(x(i-1))
end;

```

Ergebnis: $x =$

0.785398163397448, 0.707106781186548, 0.709383623179793
0.709250204125545, 0.709257906538643.



A posteriori Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 A &:= |x_4 - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_4 - x_3| \\
 &< \frac{0.8}{1-0.8} |0.709258 - 0.709250| = 4 \cdot 0.000008
 \end{aligned}$$

Relativer Fehler $\frac{|x_4 - x^*|}{|x^*|}$

Als untere Schranke für $|x^*|$ kann hier nicht die linke Intervallgrenze gewählt werden! Warum?

Aber $x_4 - A \geq 0.709257 - 0.000032 = 0.709225 > 0.7 =: us$.

Für den relativen Fehler erhält man

$$\frac{|x_4 - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{A}{|x^*|} \leq \frac{A}{us} = \frac{32 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-1}} < 5 \cdot 10^{-5}$$

Kurvendiskussion

Gegeben sei eine Rechenvorschrift $y = f(x)$. Zu klären sind oft folgende Punkte:

- (Maximaler) Definitionsbereich = $D \subset \mathbb{R}$,
- asymptotisches Verhalten ($x \rightarrow \pm\infty$), Pole ($f(x) \rightarrow \pm\infty$) etc.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ hat im Punkt $x_0 \in D'$ einen **Pol**, wenn es eine in x_0 stetige Funktion g gibt, so dass

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}, \quad g(x_0) \neq 0$$

gilt.

Für gerade (ungerade) k : Pol ohne (mit) Vorzeichenwechsel.

Eine Gerade $g(x) := ax + b$ mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

heißt **Asymptote** von f für $x \rightarrow \pm\infty$. Im Falle der Existenz einer solchen Geraden gilt

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) .$$

- Nullstellen
- Lokale Extrema, Monotonie im Inneren von D wo f diff.bar

Minimum: $\iff f'(x) = 0, f''(x) > 0$

Maximum: $\iff f'(x) = 0, f''(x) < 0$

Monoton fallend: \iff

$$(x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1)) \iff f'(x) \leq 0$$

Monoton steigend: \iff

$$(x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1)) \iff f'(x) \geq 0$$

- Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in (a, b) . Dann heißt f **konvex (konkav)**, wenn

$$\forall x \in (a, b) : f''(x) \geq (\leq) 0$$

gilt.

Der Graph einer konvexen (konkaven) Funktion liegt oberhalb (unterhalb) seiner Tangenten.

$x_0 \in (a, b)$ heißt **Wendepunkt** von f , wenn sich das Konvexitätsverhalten von f in x_0 ändert. Genauer:

$\exists \epsilon > 0 : f$ ist konvex (konkav) für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und konkav (konvex) für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$.

Ist f eine C^3 -Funktion, so gilt:

x_0 Wendepunkt $\implies f''(x_0) = 0$,

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) > 0$
 $\implies x_0$ Wendepunkt, **Rechts-Linkskurve**,

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) < 0$
 $\implies x_0$ Wendepunkt, **Links-Rechtskurve**.

- Symmetrien

Die Funktion f ist **gerade** d.h. der Graph ist **achsensymmetrisch zur y -Achse** , genau dann wenn

$$\forall x : f(-x) = f(x)$$

Die Funktion f ist **ungerade** d.h. der Graph ist **punktsymmetrisch zum Nullpunkt** , genau dann wenn

$$\forall x : f(-x) = -f(x)$$

- Bildbereich
- Evtl. Skizze

Beispiel, Aufgabe 5 Blatt 7h Wise 19/20:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) = \exp\left(\frac{2x - 1}{(x - 1)^2}\right).$$

- a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in \mathbb{R} an.
- b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$.
- c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.
- d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
- e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen

Sie die Extrema von f . **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.

Lösung: $f(x) = \exp\left(\frac{2x - 1}{(x - 1)^2}\right)$.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \infty \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty.$

d) Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen.

e) Da die Exponentialfunktion streng monoton steigt, genügt es das Monotonieverhalten von $h(x) := \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ zu untersuchen.

$$h'(x) =$$

$$f'(x) = h'(x) \exp\left(\frac{2x - 1}{(x - 1)^2}\right) = \frac{-2x}{(x - 1)^3} \exp\left(\frac{2x - 1}{(x - 1)^2}\right)$$

Die einzige Nullstelle der Ableitung liegt für $x_0 = 0$ vor.

f kann das Monotonieverhalten nur in x_0 und/oder an der Definitionslücke ändern.

Es gilt: f' hat das gleiche Vorzeichen wie h' , wobei

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[& \implies f \text{ f\u00e4llt streng monoton in }]-\infty, 0[\\ > 0 \quad \forall x \in]0, 1[& \implies f \text{ w\u00e4chst streng monoton in }]0, 1[\\ < 0 \quad \forall x \in]1, \infty[& \implies f \text{ f\u00e4llt streng monoton in }]1, \infty[\end{array} \right.$$

Alternativ: Es gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = e^{-1} < 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \implies f \text{ fällt streng monoton in }]-\infty, 0[\\ \implies f \text{ steigt streng monoton in }]0, 1[\\ \implies f \text{ fällt streng monoton in }]1, \infty[\end{array}$$

Hieraus ergibt sich ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass in $x_0 = 0$ ein Minimum vorliegt.

Zur Klassifikation des Extremums kann man natürlich auch die zweite Ableitung von h berechnen.

$$h''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-2x)}{(x-1)^6}, \quad h''(0) = 2.$$

Da $h'(0) = 0$ und $h''(0) > 0$ ist, liegt in $x_0 = 0$ ein Minimum (von h und damit von f) vor.

Eine Berechnung von f'' wäre auf jeden Fall zu viel des Aufwands.

f) Aus den oben berechneten Werten und der Stetigkeit von f auf den Intervallen $] -\infty, 1[$ und $]1, \infty[$ folgt

$$f(D) = [e^{-1}, \infty[$$

g) Bemerkung: wenn man nicht aufpasst ergibt sich als Bild annähernd eine waagerechte Linie und eine senkrechte Linie bei $x = 1$.

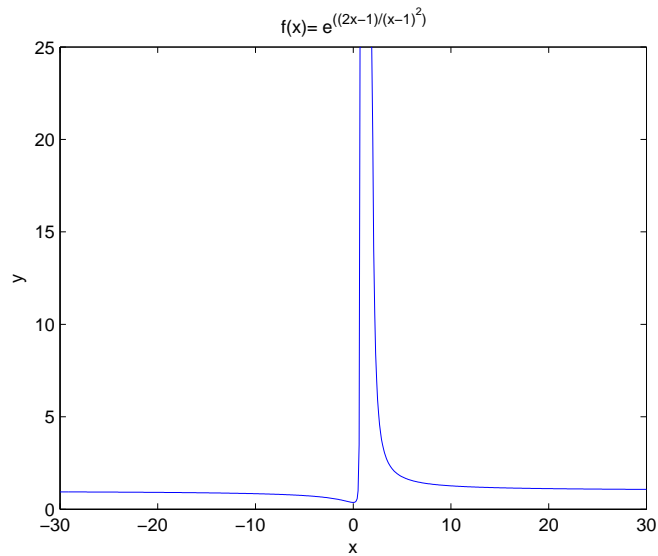


Abbildung 1: Skizze