

## Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

Gegeben sei die durch  $\Phi(x) = e^{-x^2}$  definierte Funktion.

- Man zeige, dass  $\Phi$  genau einen Fixpunkt  $x^*$  besitzt.
- Man gebe ein Intervall  $D$  an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

für jeden Startwert  $x_0 \in D$  auf Grund des Fixpunktsatzes gegen  $x^*$  konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte  $n$  werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von  $|x_n - x^*| < 10^{-3}$  höchstens benötigt?

- Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von  $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ .

#### Aufgabe 6:

Man untersuche die Funktionenfolgen

a)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}$ ,    b)  $g_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_n(x) = \frac{n}{n + 1 + nx^2}$

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

**Aufgabe 7:**

Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

$$(i) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^k}, \quad (ii) \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}.$$

**Aufgabe 8:**

- a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n, \quad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n.$$

- b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

**Abgabetermin:** 23.4. - 26.4.19 (zu Beginn der Übung)