

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne die folgenden Integrale

$$\text{a) } \int \frac{3}{5-2x} dx$$

$$\text{Substitution: } t = 5 - 2x \quad \rightarrow \quad dt = -2 dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{5-2x} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= -\frac{3}{2} \ln |t| + C = -\frac{3}{2} \ln |5-2x| + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{(7x-4)^2} dx$$

$$\text{Substitution: } t = 7x - 4 \quad \rightarrow \quad dt = 7 dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(7x-4)^2} dx &= \frac{1}{7} \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{1}{7} t^{-1} + C = -\frac{1}{7(7x-4)} + C = \frac{1}{28-49x} + C \end{aligned}$$

$$c) \int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x - 1} dx$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (6x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (2x - 1) = 3x^2 + 1 - \frac{2}{2x - 1} \\ \underline{-(6x^3 - 3x^2)} \\ 2x - 3 \\ \underline{-(2x - 1)} \\ - 2 \end{array}$$

$$\int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x - 1} dx = \int 3x^2 + 1 - \frac{2}{2x - 1} dx$$

$$\text{Substitution: } t = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2 dx$$

$$= x^3 + x - \int \frac{1}{t} dt + C$$

$$= x^3 + x - \ln |t| + C = x^3 + x - \ln |2x - 1| + C$$

$$d) \int \frac{5}{x^2 + 2} dx$$

$$\int \frac{5}{x^2 + 2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2 + 1} dx$$

$$\text{Substitution: } t = \frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = \sqrt{2} dt$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan(t) + C$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$e) \int \frac{5x}{2x^2 + 2} dx$$

$$\int \frac{5x}{2x^2 + 2} dx = \frac{5}{4} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Substitution: } t = x^2 + 1 \rightarrow dt = 2x dx$$

$$= \frac{5}{4} \int \frac{1}{t} dt = \frac{5}{4} \ln |t| + C = \frac{5}{4} \ln |x^2 + 1| + C$$

$$f) \int \frac{6x}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x}{x^2 + 4x + 5} dx &= \int \frac{3(2x + 4) - 12}{(x + 2)^2 + 1} dx \\ &= 3 \int \frac{2(x + 2)}{(x + 2)^2 + 1} dx - 12 \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Substitution: $t = x + 2 \rightarrow dt = dx$

$$= 3 \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt - 12 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Substitution: $u = t^2 + 1 \rightarrow du = 2t dt$

$$\begin{aligned} &= 3 \int \frac{1}{u} du - 12 \arctan t \\ &= 3 \ln |u| - 12 \arctan t + C \\ &= 3 \ln |t^2 + 1| - 12 \arctan(x + 2) + C \\ &= 3 \ln |x^2 + 4x + 5| - 12 \arctan(x + 2) + C \end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen

Schritte zur reellen Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die durch die Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ definierte gebrochen rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

a) Polynomdivision

Falls $\deg P \geq \deg Q$ führe eine Polynomdivision mit polynomialem Anteil $p(x)$ und Rest $r(x)$ durch:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

wobei $\deg p = \deg P - \deg Q$ und $\deg r < \deg Q$.

b) Faktorisierung von Q

$$Q(x) = c(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_n)^{k_n} q_1^{\ell_1}(x) \cdots q_m^{\ell_m}(x)$$

Dabei sind $q_j(x) = (x - a_j)^2 + b_j^2$ quadratische Polynome mit komplexen Nullstellen,

also in \mathbb{R} nicht in Linearfaktoren zerlegbare Polynome.

c) **Partialbrüche**(i) zu $(x - x_j)^{k_j}$:

$$\frac{\alpha_{j,1}}{x - x_j}, \frac{\alpha_{j,2}}{(x - x_j)^2}, \dots, \frac{\alpha_{j,k_j}}{(x - x_j)^{k_j}}$$

(ii) zu $q_j^{\ell_j}(x)$:

$$\frac{\gamma_{j,1}x + \delta_{j,1}}{(x - a_j)^2 + b_j^2}, \frac{\gamma_{j,2}x + \delta_{j,2}}{((x - a_j)^2 + b_j^2)^2}, \dots, \frac{\gamma_{j,\ell_j}x + \delta_{j,\ell_j}}{((x - a_j)^2 + b_j^2)^{\ell_j}}$$

d) **Partialbruchzerlegungsansatz**

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_{j,1}}{x - x_j} + \frac{\alpha_{j,2}}{(x - x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{j,k_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) \\ &+ \frac{1}{c} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_{j,1}x + \delta_{j,1}}{(x - a_j)^2 + b_j^2} + \dots + \frac{\gamma_{j,\ell_j}x + \delta_{j,\ell_j}}{((x - a_j)^2 + b_j^2)^{\ell_j}} \right) \end{aligned}$$

e) **Berechnung der Unbekannten** $\alpha_{j,i}, \gamma_{j,i}, \delta_{j,i}$ (i) **Koeffizientenvergleich**

Multipliziere den Partialbruchzerlegungsansatz mit $Q(x)$

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^n (\dots) + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^m (\dots)$$

und vergleiche die Koeffizienten des Polynoms $r(x)$ mit denen des durch Kürzen, Ausmultiplizieren und Sortieren nach x -Potenzen entstandenen Polynoms der rechten Seite.

Die Unbekannten $\alpha_{j,i}, \gamma_{j,i}, \delta_{j,i}$ ergeben sich als Lösung des aus dem Koeffizientenvergleich resultierenden Gleichungssystem.

(ii) **Einsetzungsmethode**

Multipliziere den Partialbruchzerlegungsansatz mit $Q(x)$

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^n (\dots) + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^m (\dots)$$

und kürze auf der rechten Seite die Nennerfaktoren gegen die aus $Q(x)$.

Ohne die rechte Seite auszumultiplizieren werden jetzt die reellen Nullstellen x_j und ggf. die komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ von $Q(x)$ nacheinander jeweils auf beiden Seiten eingesetzt. Damit lassen sich die Unbekannten $\alpha_{j,k_j}, \gamma_{j,\ell_j}, \delta_{j,\ell_j}$ berechnen.

Durch (ggf. mehrfaches) Ableiten und Wiederholung des obigen Verfahrens ergeben sich die übrigen Unbekannten, falls die linearen oder quadratischen Faktoren von $Q(x)$ in höherer als erster Potenz auftreten.

Berechnung von $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Das Integral ergibt sich durch Integration der aus der polynomia-
len und Partialbruchzerlegung resultierenden Summanden und an-
schließender Summation der Teilintegrale.

Dazu ist die Integration der folgenden Typen erforderlich:

a) **Polynome:** $p(x) = \sum_{k=0}^s c_k x^k$

$$\int p(x) dx = \sum_{k=0}^s c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

b) **Partialbruchtyp:** $\frac{1}{(x - x_j)^k}$

(i) $k = 1$: $\int \frac{1}{x - x_j} dx = \ln |x - x_j| + C$

(ii) $k \geq 2$: $\int \frac{1}{(x - x_j)^k} dx = \frac{1}{1 - k} \cdot \frac{1}{(x - x_j)^{k-1}} + C$

c) **Partialbruchtyp:**

$$\frac{cx + d}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2(x - a)}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} + (ca + d) \frac{1}{((x - a)^2 + b^2)^\ell}$$

$$(i) \quad \ell = 1: \quad \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} dx = \ln((x-a)^2 + b^2) + C$$

$$(ii) \quad \ell \geq 2:$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} dx \\ &= \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} + C \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \ell = 1: \quad \int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$$

$$(iv) \quad \text{Rekursionsformel für } \ell \geq 2:$$

$$\begin{aligned} I_\ell &:= \int \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} dx \\ &= \frac{1}{2(1-\ell)b^2} \left((3-2\ell) \underbrace{\int \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} dx}_{=I_{\ell-1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x-a}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} \right) + C \end{aligned}$$

Beweis der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} I_{\ell-1} &:= \int \frac{(x-a)^2 + b^2}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} dx \\ &= \int \frac{(x-a)}{2} \cdot \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} dx + b^2 I_\ell \end{aligned}$$

partielle Integration:

$$u = \frac{(x-a)}{2} \quad \text{und} \quad v' = \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^\ell}$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}}$$

$$\int \frac{(x-a)}{2} \cdot \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^\ell} dx$$

$$= \frac{(x-a)}{2} \cdot \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-l)} I_{\ell-1}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\ell-1} = \frac{1}{2(1-l)} \cdot \frac{x-a}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-l)} I_{\ell-1} + b^2 I_\ell$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad I_\ell &= \frac{1}{b^2} \left(I_{\ell-1} \left(1 + \frac{1}{2(1-l)} \right) - \frac{1}{2(1-l)} \cdot \frac{x-a}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2(1-l)b^2} \left((3-2\ell) I_{\ell-1} - \frac{x-a}{((x-a)^2 + b^2)^{\ell-1}} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 22:

Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\text{a) } \int \frac{7}{3x^2 + 15x - 18} dx ,$$

Nennerfaktorisierung:

$$3x^2 + 15x - 18 = 3(x^2 + 5x - 6) = 3(x - 1)(x + 6)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3x^2 + 15x - 18} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{x^2 + 5x - 6} \right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{(x - 1)(x + 6)} \right)$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 6)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 6} = \frac{A(x + 6) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 6)}$$

Multiplikation der Gleichung mit $(x - 1)(x + 6)$

$$\Rightarrow 1 = A(x + 6) + B(x - 1)$$

Nennernullstellen einsetzen:

$$x = 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 = A(1 + 6) + B(1 - 1) = 7A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{7}$$

$$x = -6 \quad \Rightarrow$$

$$1 = A(-6 + 6) + B(-6 - 1) = -7B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{7}{3x^2 + 15x - 18} dx &= \frac{7}{3} \int \frac{1}{7x - 1} - \frac{1}{7x + 6} dx \\ &= \frac{1}{3} (\ln |x - 1| - \ln |x + 6|) + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{x^3 + x^2 - 35x + 17}{x^2 + 6x - 7} dx ,$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 35x + 17) : (x^2 + 6x - 7) = x - 5 + \frac{2x - 18}{x^2 + 6x - 7} \\ -(x^3 + 6x^2 - 7x) \\ \hline -5x^2 - 28x + 17 \\ -(-5x^2 - 30x + 35) \\ \hline 2x - 18 \end{array}$$

Nennerfaktorisierung: $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{2x - 18}{x^2 + 6x - 7} = \frac{2x - 18}{(x - 1)(x + 7)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 7}$$

$$\Rightarrow 2x - 18 = A(x + 7) + B(x - 1) = (A + B)x + 7A - B$$

Berechnung von A und B über einen Koeffizientenvergleich von

$$2x - 18 = (A + B)x + 7A - B$$

$$-18 = 7A - B \quad \Rightarrow \quad B = 7A + 18$$

$$2 = A + B = A + 7A + 18 = 8A + 18$$

$$\Rightarrow 8A = -16 \quad \Rightarrow \quad A = -2 \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

alternativ:

Berechnung von A und B durch Einsetzen von x -Werten, vorzugsweise der Nennernullstellen in die Gleichung:

$$2x - 18 = A(x + 7) + B(x - 1)$$

$$x = 1: \quad 2 - 18 = -16 = A(1 + 7) \quad \Rightarrow \quad A = -2$$

$$x = -7: \quad 2 \cdot (-7) - 18 = -32 = B(-7 - 1) \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

Integration:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3 + x^2 - 35x + 17}{x^2 + 6x - 7} dx \\ &= \int x - 5 - \frac{2}{x - 1} + \frac{4}{x + 7} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 5x - 2 \ln |x - 1| + 4 \ln |x + 7| + C \end{aligned}$$

$$c) \int \frac{9}{(2x^2 + 3)^2} dx .$$

Dieses Integral wird über die Rekursionsformel mit $\ell = 2$ berechnet

$$\begin{aligned} & \int \frac{9}{(2x^2 + 3)^2} dx \\ &= \int \frac{9}{3^2(2x^2/3 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)^2} dx \quad \text{Substitution} \quad t = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt \quad \text{Rekursionsformel mit } \ell = 2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(1-2)} \left((3 - 2 \cdot 2) \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \frac{t}{t^2 + 1} \right) + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\arctan t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) + C \quad \text{Rücksubstitution} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right) + C \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{6}} + \frac{x}{2x^2 + 3} \right) + C \end{aligned}$$

Aufgabe 23:

Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} dx .$$

Lösung:

Raten der Nennernullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 27) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 4x^3 + 27) : (x - 3) = x^3 - x^2 - 3x - 9 \\ \underline{-(x^4 - 3x^3)} \\ -x^3 + 27 \\ \underline{-(-x^3 + 3x^2)} \\ -3x^2 + 27 \\ \underline{-(-3x^2 + 9x)} \\ -9x + 27 \\ \underline{-(-9x + 27)} \\ 0 \end{array}$$

Erneutes Raten der Nullstelle $x = 3$ (Teiler der Konstanten 9) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x - 3) = x^2 + 2x + 3 = ((x + 1)^2 + 2) \\
 \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\
 2x^2 - 3x - 9 \\
 \underline{-(2x^2 - 6x)} \\
 3x - 9 \\
 \underline{-(3x - 9)} \\
 0
 \end{array}$$

Damit lautet die Nennerfaktorisierung:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x - 3)^2(x^2 + 2x + 3) = (x - 3)^2((x + 1)^2 + 2).$$

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} dx = \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{(x - 3)^2((x + 1)^2 + 2)} dx$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{Cx + D}{(x + 1)^2 + 2}$$

$$\Rightarrow 8x^3 - 43x^2 + 46x - 39$$

$$= A(x-3)((x+1)^2+2) + B((x+1)^2+2) + (Cx+D)(x-3)^2$$

Koeffizienten über Einsetzen verschiedener x -Werte berechnen:

Berechnung von B durch Einsetzen der Nennernullstelle $x = 3$:

$$8 \cdot 3^3 - 43 \cdot 3^2 + 46 \cdot 3 - 39 = -72 = B(4^2 + 2) \quad \Rightarrow \quad B = -4$$

Berechnung von A durch Ableiten

$$24x^2 - 86x + 46 =$$

$$A((x+1)^2+2) + B \cdot 2(x+1) + (x-3)[2A(x+1) + C(x-3) + 2(Cx+D)]$$

und dann Einsetzen der Nennernullstelle $x = 3$:

$$24 \cdot 3^2 - 86 \cdot 3 + 46 = 4 = A(4^2 + 2) - 4 \cdot 2(3 + 1) \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

Berechnung von C und D durch Einsetzen geeigneter x Werte:

$$x = 0 :$$

$$\begin{aligned} -39 &= A(-3)(1^2+2) + B(1^2+2) + (C \cdot 0 + D)(-3)^2 \\ &= -30 + 9D \quad \Rightarrow \quad D = -1 \end{aligned}$$

$$x = 1 :$$

$$8 - 43 + 46 - 39 = -28$$

$$= A(-2)((2)^2 + 2) + B((2)^2 + 2) + (C + D)(1 - 3)^2$$

$$= -52 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = 6$$

Damit kann das Integral mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden

$$\begin{aligned} & \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} dx \\ &= \int \frac{2}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} + \frac{6x-1}{(x+1)^2+2} dx \\ &= 2 \ln |x-3| + \frac{4}{x-3} \\ & \quad + 3 \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2} dx - 7 \int \frac{1}{(x+1)^2+2} dx + \tilde{C} \end{aligned}$$

Zur Lösung der verbleibenden Teilintegrale:

$$\text{Substitution: } t = (x+1)^2 + 2 \rightarrow dt = 2(x+1)dx$$

$$3 \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2} dx = 3 \int \frac{1}{t} dt = 3 \ln |t| = 3 \ln |(x+1)^2+2| + C_1.$$

Substitution

$$t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = \sqrt{2}dt$$

$$7 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \frac{7}{2} \int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{2})^2 + 1} dx$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{7}{\sqrt{2}} \arctan t = \frac{7}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C_2.$$

Damit erhält man die Stammfunktion

$$\int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} dx$$

$$= 2 \ln |x-3| + \frac{4}{x-3} + 3 \ln |(x+1)^2 + 2| - \frac{7}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + K.$$

Berechnung von $\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx$

Substitution: $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = \int \frac{P(t)}{t \cdot Q(t)} dt .$$

Berechnung von $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$

Die Substitution:

$$t = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}$$

ergibt nach kurzer Rechnung (*):

$$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

und führt damit auf den Standardfall:

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx = \int \frac{2 \cdot P\left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\right)}{(t^2 + 1) \cdot Q\left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\right)} dt .$$

Zur kurzen Rechnung (*):

$$\frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{2 \tan(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1} = \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \sin x$$

$$\frac{1 - t^2}{t^2 + 1} = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos x$$

Aufgabe 24:

Man berechne die unbestimmten Integrale

a) Additionstheorem: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und

partielle Integration: $u = \cosh t, v' = \cosh t$

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 t \, dt &= \int \cosh t \cosh t \, dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \sinh t \sinh t \, dt + \tilde{C} \\ &= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t - 1 \, dt + \tilde{C}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int \cosh^2 t \, dt = t + \cosh t \sinh t + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \int \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t + \cosh t \sinh t) + C$$

b) Substitution:

$$x = \sinh t \Rightarrow dx = \cosh t \, dt \quad \text{und} \quad t = \operatorname{arsinh} x$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t \, dt \\ &= \int \cosh^2 t \, dt \\ &= \frac{1}{2}(t + \cosh t \sinh t) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arsinh} x + x\sqrt{1+x^2} \right) + C\end{aligned}$$

$$c) \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 4} dx,$$

$$\text{Substitution: } t = e^x \quad dx = \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 4} dx &= \int \frac{t^3}{t^3 + 4} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{3t^2}{t^3 + 4} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln(t^3 + 4) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 4) + C \end{aligned}$$

$$d) \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\text{Substitution: } \tan \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{2dt}{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\frac{1 - t^2}{t^2 + 1}} \frac{2dt}{t^2 + 1} = \int \frac{2}{1 - t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} dt \\ &= \ln |1 + t| - \ln |1 - t| + C = \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$