

# Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

## Polynom-Interpolation

Für reelle **Stützstellen**

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

seien zugehörige reelle Funktionswerte = **Stützwerte**

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$$

bekannt.

Gesucht ist ein Polynom  $n$ -ten Grades

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

das die **Stützpunkte**  $(x_i, y_i)$  **interpoliert**, d.h. es gilt

$$y_i = P_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Diese  $n + 1$  Gleichungen führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix heißt **Vandermonde-Matrix** und ist regulär für paarweise verschiedene Stützstellen, also für

$$x_i \neq x_j \quad \text{für } i \neq j.$$

### Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Zu paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_i$  **gibt es genau ein** Interpolationspolynom  $n$ -ten Grades  $P_n$ , für das gilt

$$y_i = P_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Das Interpolationspolynom  $P_n$  wird **nicht** über das Gleichungssystem mit der Vandermonde-Matrix berechnet.

### Lagrange-Darstellung

#### Lagrange-Polynome:

$$\begin{aligned} L_k(x) &:= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \\ &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \end{aligned}$$

Die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynom:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

ist eher eine Darstellungsformel und eignet sich weniger für die numerische Auswertung.

### Aufgabe 13:

Für die Stützstellen  $x_i$  und sind nur die Funktionswerte  $f_i$  bekannt

|       |     |   |    |     |
|-------|-----|---|----|-----|
| $x_i$ | -1  | 1 | 3  | 5   |
| $f_i$ | -15 | 3 | -3 | 15. |

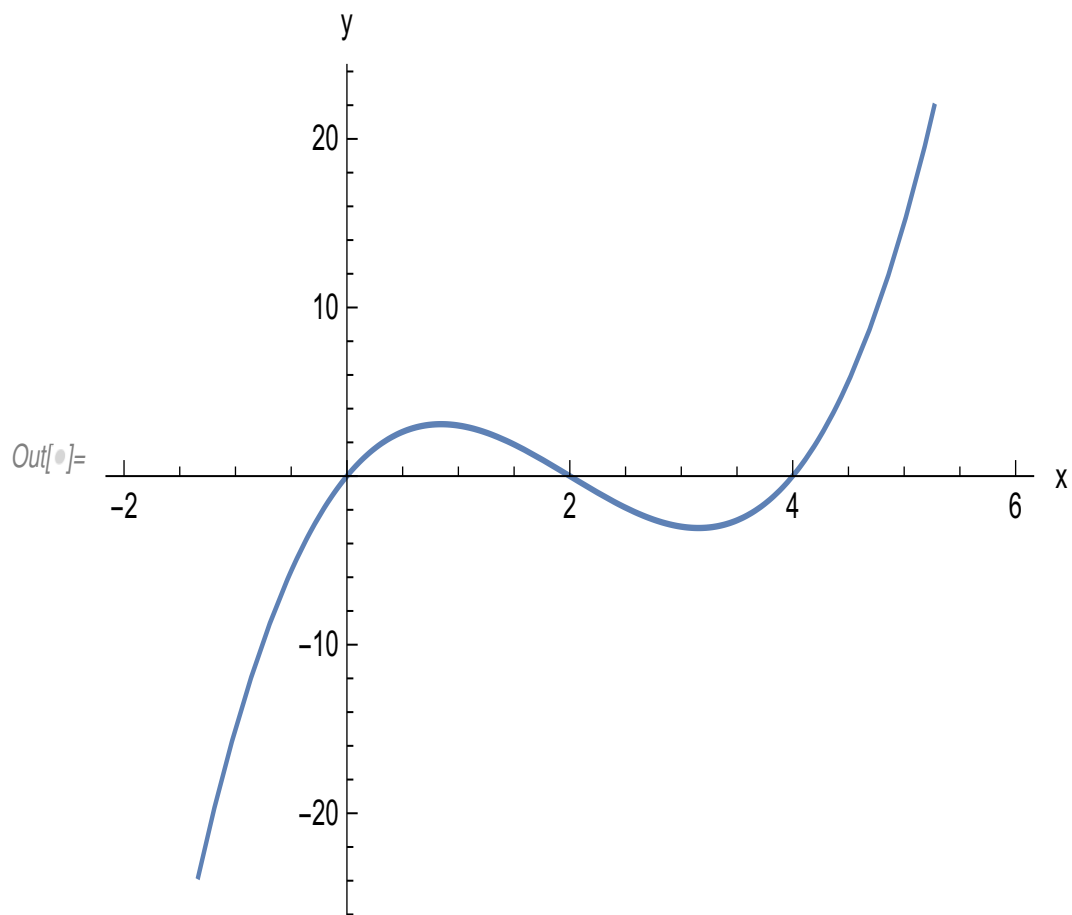
### Lösung:

- a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Polynoms  $p_3$  an, das die obigen Daten interpoliert.

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= -15 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} \\
 &\quad + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-3)(1-5)} \\
 &\quad - 3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-1)(3-5)} + 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-1)(5-3)} \\
 &= -15 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{-48} + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{16} \\
 &\quad - 3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{-16} + 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{48}
 \end{aligned}$$

b) Man zeichne  $p_3$ .

Für die Zeichnung und zur Überprüfung, ob c) erfüllt ist, multiplizieren wir die Lagrange-Darstellung (ausnahmsweise) aus.



**Bild 13**  $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x - 2)(x - 4)$

c) Bestimme das Gleichungssystem, dass  $p_3$  in der Form

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

aufgrund der obigen Interpolationsdaten erfüllen muss.

Die Koeffizienten von

$$p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

lauten:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 8, -6, 1).$$

Diese sind eindeutig bestimmt und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

## Auswertung von Interpolationspolynomen

$p_{kj}$  bezeichne das Interpolationspolynom vom Grad  $j$  mit  $0 \leq j \leq k \leq n$ , das folgende Stützpunkte interpoliert

$$(x_{k-j}, y_{k-j}), \dots, (x_k, y_k).$$

Beispiele:

$j = 0$ :

$$p_{00}(x_0) = y_0 ,$$

$$p_{10}(x_1) = y_1 ,$$

$$p_{20}(x_2) = y_2 ,$$

$\vdots$

$$p_{n0}(x_n) = y_n$$

$j = 1$ :

$$p_{11}(x_0) = y_0 , \quad p_{11}(x_1) = y_1 ,$$

$$p_{21}(x_1) = y_1 , \quad p_{21}(x_2) = y_2 ,$$

$\vdots$

$$p_{n1}(x_{n-1}) = y_{n-1} , \quad p_{n1}(x_n) = y_n$$

$j = 2$ :

$$p_{22}(x_0) = y_0 , \quad p_{22}(x_1) = y_1 , \quad p_{22}(x_2) = y_2 ,$$

$$p_{32}(x_1) = y_1 , \quad p_{32}(x_2) = y_2 , \quad p_{32}(x_3) = y_3 ,$$

$\vdots$

$$p_{n2}(x_{n-2}) = y_{n-2} , \quad p_{n2}(x_{n-1}) = y_{n-1} , \quad p_{n2}(x_n) = y_n$$

**Rekursion von Aitken:**

Rekursionsstart:  $p_{k,0}(x) := y_k$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Berechne für  $1 \leq j \leq k \leq n$ :

$$p_{k,j}(x) = p_{k,j-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k-j} - x_k} (p_{k-1,j-1}(x) - p_{k,j-1}(x))$$

**Für einen festen Wert**  $x \in \mathbb{R}$  kann  $p_{n,n}(x)$  über folgendes Zahlenschema ausgerechnet werden:

**Schema von Neville-Aitken**

| $k \downarrow$ | $x_k$    | $P_{k,0}(x) := y_k$ | $P_{k,1}(x)$ | $P_{k,2}(x)$ | $P_{k,3}(x)$ | $\dots$            |
|----------------|----------|---------------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| 0              | $x_0$    | $p_{0,0}(x) := y_0$ |              |              |              |                    |
| 1              | $x_1$    | $p_{1,0}(x) := y_1$ | $p_{1,1}(x)$ |              |              |                    |
| 2              | $x_2$    | $p_{2,0}(x) := y_2$ | $p_{2,1}(x)$ | $p_{2,2}(x)$ |              |                    |
| 3              | $x_3$    | $p_{3,0}(x) := y_3$ | $p_{3,1}(x)$ | $p_{3,2}(x)$ | $p_{3,3}(x)$ |                    |
| $\vdots$       | $\vdots$ | $\vdots$            | $\vdots$     | $\vdots$     | $\vdots$     | $\dots$            |
| $n$            | $x_n$    | $p_{n,0}(x) := y_n$ | $p_{n,1}(x)$ | $p_{n,2}(x)$ | $p_{n,3}(x)$ | $\dots p_{n,n}(x)$ |

**Satz: Interpolationsfehler**

Gegeben sei eine Funktion  $f \in C^{n+1}[a, b]$  und das Interpolationspolynom  $P_n(x)$  zu den Stützpunkten  $(x_k, f(x_k))$  mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Dann gibt es zu jedem  $x \in [a, b]$  eine Zahl  $\xi \in ]a, b[$ , so dass der Interpolationsfehler die folgende Darstellung besitzt

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$



**Aufgabe 14:**

a) Das (lineare) Polynom

$p_{1,1}$  interpoliere die Stützpunkte  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  und  
 $p_{2,1}$  interpoliere  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ .

Man rechne durch einsetzen nach, dass

$$p_{2,2}(x) = p_{2,1}(x) + \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} (p_{1,1}(x) - p_{2,1}(x))$$

die Stützpunkte  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  interpoliert.

$$\begin{aligned} p_{2,2}(x_0) &= p_{2,1}(x_0) + \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_2} (p_{1,1}(x_0) - p_{2,1}(x_0)) \\ &= p_{1,1}(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2,2}(x_1) &= p_{2,1}(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2} (p_{1,1}(x_1) - p_{2,1}(x_1)) \\ &= y_1 + \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2} (y_1 - y_1) = y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2,2}(x_2) &= p_{2,1}(x_2) + \frac{x_2 - x_2}{x_0 - x_2} (p_{1,1}(x_2) - p_{2,1}(x_2)) \\ &= p_{2,1}(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

b) Von der Funktion  $g(x) = \ln x$  seien nur die Stützstellen

|           |        |   |       |
|-----------|--------|---|-------|
| $x_i$     | 0.5    | 1 | 2     |
| $\ln x_i$ | -0.693 | 0 | 0.693 |

bekannt.

- (i) Für das Interpolationspolynom  $p$  niedrigsten Grades berechne man  $p(1.5)$  als Näherungswert für  $\ln 1.5$  mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken.

$$\begin{aligned} P_{1,1}(1.5) &= P_{1,0}(1.5) + \frac{1.5 - x_1}{x_0 - x_1} (P_{0,0}(1.5) - P_{1,0}(1.5)) \\ &= 0 + \frac{1.5 - 1}{0.5 - 1} (-0.693 - 0) = 0.693 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,1}(1.5) &= P_{2,0}(1.5) + \frac{1.5 - x_2}{x_1 - x_2} (P_{1,0}(1.5) - P_{2,0}(1.5)) \\ &= 0.693 + \frac{1.5 - 2}{1 - 2} (0 - 0.693) = 0.3465 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,2}(1.5) &= P_{2,1}(1.5) + \frac{1.5 - x_2}{x_0 - x_2} (P_{1,1}(1.5) - P_{2,1}(1.5)) \\ &= 0.3465 + \frac{1.5 - 2}{0.5 - 2} (0.693 - 0.3465) = 0.462 \end{aligned}$$

| $k$ | $x_k$ | $P_{k,0}$ | $P_{k,1}$ | $P_{k,2}$              |
|-----|-------|-----------|-----------|------------------------|
| 0   | 0.5   | -0.693    | -         | -                      |
| 1   | 1     | 0         | 0.693     | -                      |
| 2   | 2     | 0.693     | 0.3465    | $0.462 = p_{2,2}(1.5)$ |

- (ii) Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

Mit  $\tau \in ]0.5, 2[$  gilt :

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad g'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$|\ln 1.5 - p(1.5)| = \left| \frac{g'''(\tau)}{3!} (1.5 - 0.5)(1.5 - 1)(1.5 - 2) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{12\tau^3} \right| \begin{cases} \leq \frac{2^3}{12} \leq 0.6667 \\ \geq \frac{1}{12 \cdot 2^3} \geq 0.0104 \end{cases}$$

Zum Vergleich: der tatsächliche Fehler

$$|\ln 1.5 - p(1.5)| \doteq |0.405465 - 0.462| \doteq 0.0565$$

- (iii) Man berechne  $p(1.5)$  mit einem Matlab-Programm nach dem Schema von Neville-Aitken.

mit dem Matlab-Programm (vgl. Skript S.66) in der Datei

`neville_aitken.m`

```
% INPUT:
```

```
% x=(x(1),...,x(n)) : Stützstellen
```

```
% f=(f(1),...,f(n)) : Stützwerte zu x
```

```
% y : Auswertungsstelle
```

```
% OUTPUT:
```

```
% p: Funktionswert des Interpolationspolynoms bei y
```

```
function p=neville(x,f,y)
```

```
x
```

```
f
```

```
n = length(x);
```

```
for k=2:n
```

```
    z=y-x(k);
```

```
    for i=k-1:-1:1
```

```
        f(i) = f(i+1)+z/(x(i)-x(k))*(f(i)-f(i+1))
```

```
    end
```

```
end
```

```
p= f(1);
```

Ergeben folgende Matlab-Befehle

```
>> x=[0.5 1 2]
```

```
>> y=[-0.693 0 0.693]
```

```
>> neville_aitken(x,y,1.5)
```

```
x = 0.5000    1.0000    2.0000
```

```
f = -0.6930         0    0.6930
```

```
f = 0.6930         0    0.6930
```

```
f = 0.6930    0.3465    0.6930
```

```
f = 0.4620    0.3465    0.6930
```

```
ans = 0.4620
```

## Newton'sche Darstellung

Nach Newton wird das Interpolationspolynom  $P_n$  zu den Stützpunkten  $(x_i, y_i)$  mit  $i = 0, 1, \dots, n$  und paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_i$  in folgender Basisdarstellung gewählt

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Die Koeffizienten  $c_0, c_1, \dots, c_n$  ergeben sich aus dem Schema der **dividierten Differenzen**

|          |                   |                 |               |                   |               |  |
|----------|-------------------|-----------------|---------------|-------------------|---------------|--|
| $x_0$    | $y_0 = c_0$       |                 |               |                   |               |  |
|          | ↘                 |                 |               |                   |               |  |
| $x_1$    | $y_1 \rightarrow$ | $y_{0,1} = c_1$ |               |                   |               |  |
|          | ↘                 |                 |               |                   |               |  |
| $x_2$    | $y_2 \rightarrow$ | $y_{1,2}$       | $\rightarrow$ | $y_{0,1,2} = c_2$ |               |  |
|          | ↘                 |                 |               |                   |               |  |
| $x_3$    | $y_3 \rightarrow$ | $y_{2,3}$       | $\rightarrow$ | $y_{1,2,3}$       | $\rightarrow$ | $y_{0,1,2,3} = c_3$                        |
|          | ↘                 |                 |               |                   |               |  |
| $\vdots$ | $\vdots$          | $\vdots$        | $\vdots$      | $\vdots$          | $\vdots$      |  |
|          | ↘                 |                 |               |                   |               |  |
| $x_n$    | $y_n \rightarrow$ | $y_{n-1,n}$     | $\rightarrow$ | $y_{n-2,n-1,n}$   | $\rightarrow$ | $\cdots \rightarrow y_{0,1,\dots,n} = c_n$ |

Dabei berechnen sich die dividierten Differenzen  
für  $0 \leq j < k \leq n$  durch

$$y_{j,\dots,k} = \frac{y_{j+1,\dots,k} - y_{j,\dots,k-1}}{x_k - x_j} .$$

Damit ist eine rekursive zeilenweise Berechnung möglich:

Zeile mit  $x_1$ :  $y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Zeile mit  $x_2$ :  $y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ,  $y_{0,1,2} = \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}$

Zeile mit  $x_3$ :

$$y_{2,3} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} ,$$

$$y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1} ,$$

$$y_{0,1,2,3} = \frac{y_{1,2,3} - y_{0,1,2}}{x_3 - x_0}$$

usw.

### Aufgabe 15:

- a) Von der Funktion  $\sinh(x)$  sind nur die Stützpunkte gegeben

|             |   |    |       |
|-------------|---|----|-------|
| $x_i$       | 0 | 3  | 6     |
| $\sinh x_i$ | 0 | 10 | 201.7 |

Man berechne das Interpolationspolynom  $p_2(x)$ .

Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung

Zeile mit  $x_1$ : 
$$y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{10 - 0}{3 - 0} = \frac{10}{3} = 3.333$$

Zeile mit  $x_2$ :

$$y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{201.7 - 10}{6 - 3} = 63.9,$$

$$y_{0,1,2} = \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0} = \frac{63.9 - 10/3}{6 - 0} = 10.0944$$

|   |       |      |       |
|---|-------|------|-------|
| 0 | 0     |      |       |
| 3 | 10    | 3.33 |       |
| 6 | 201.7 | 63.9 | 10.09 |

$$\Rightarrow p_2(x) = 0 + 3.3x + 10.1x(x-3) = 3.3x + 10.1x(x-3)$$

Alternativ lautet die Lagrange-Darstellung des Polynoms:

$$p_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-3)(x-6)}{(0-3)(0-6)} + 10 \cdot \frac{(x-0)(x-6)}{(3-0)(3-6)} + 201.7 \cdot \frac{(x-0)(x-3)}{(6-0)(6-3)}$$



b) Man berechne  $p_2(4)$  als Näherungswert für  $\sinh(4)$ .

Wie groß ist der Fehler höchstens?

Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.

$$p_2(4) = 3.33 \cdot 4 + 10.09 \cdot 4 = 53.71$$

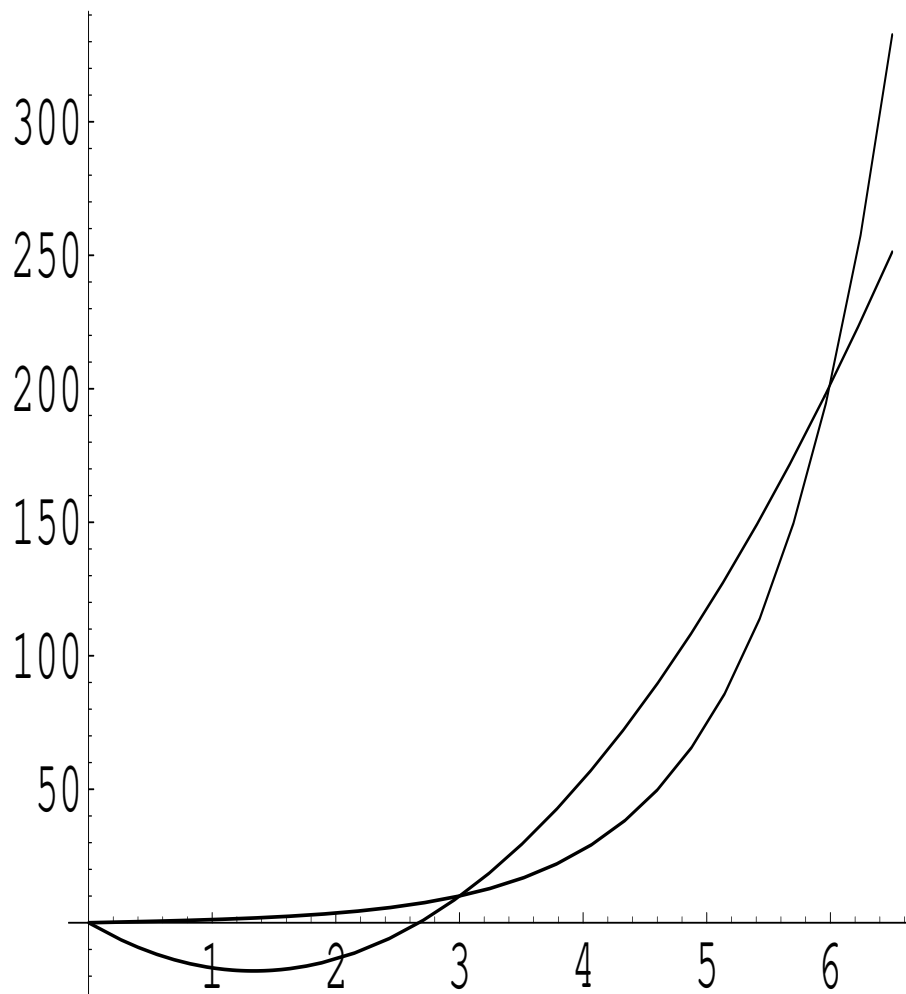
Mit  $\tau \in ]0, 6[$  gilt:

$$\begin{aligned} |\sinh(4) - p_2(4)| &= \left| \frac{\sinh'''(\tau)}{3!} (4-0)(4-3)(4-6) \right| \\ &= \frac{4 \cosh \tau}{3} \leq \frac{4 \cosh 6}{3} \\ &\doteq \frac{4 \cdot 201.7}{3} \doteq 268.93 \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler:

$$|\sinh(4) - p_2(4)| \doteq |27.29 - 53.71| = 26.4$$

c) Man zeichne  $\sinh(x)$  und  $p_2(x)$  im Intervall  $[0, 6.5]$ .



**Bild 15 c)**  $\sinh x$  und  $p_2(x)$

d) Zusätzlich sei noch  $\sinh(5) = 74.2$  gegeben.

Damit führe man a) bis c) bzgl.  $p_3(x)$  durch.

(i) An das Schema der dividierten Differenzen aus a) wird für  $p_3$  eine Zeile angehängt

Zeile mit  $x_3$ :

$$y_{2,3} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{74.2 - 201.7}{5 - 6} = 127.5,$$

$$y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1} = \frac{127.5 - 63.9}{5 - 3} = 31.8,$$

$$y_{0,1,2,3} = \frac{y_{1,2,3} - y_{0,1,2}}{x_3 - x_0} = \frac{31.8 - 10.0944}{5 - 0} = 4.34$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 3 & 10 & 3.33 & & \\ 6 & 201.7 & 63.9 & 10.09 & \\ 5 & 74.2 & 127.5 & 31.8 & 4.34 \end{array}$$

$$\Rightarrow p_3(x) = p_2(x) + 4.34x(x-3)(x-6)$$

Die Lagrange-Darstellung von  $p_2$  kann nicht durch Anhängen eines Summanden in  $p_3$  überführt werden. Es ändern sich hier alle Terme.

$$(ii) \quad p_3(4) = p_2(4) + 4.34 \cdot 4(4-3)(4-6) = 18.99$$

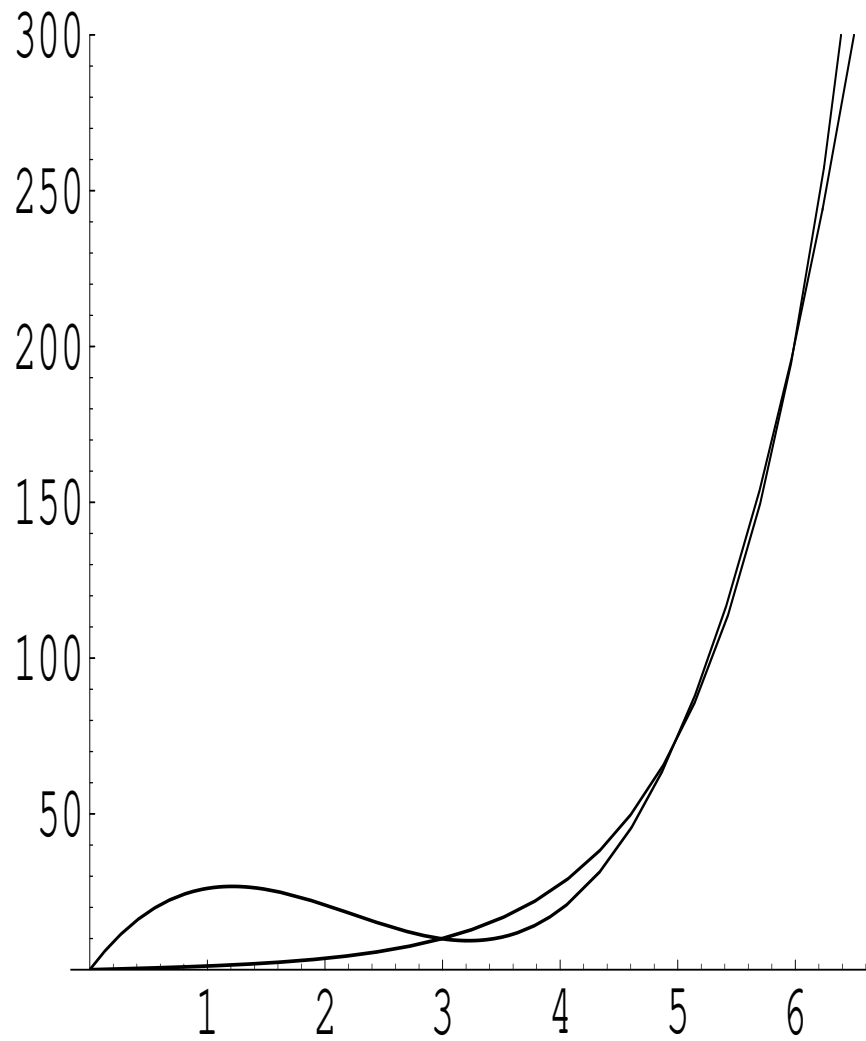
Mit  $\tau \in ]0, 6[$  gilt:

$$\begin{aligned} |\sinh(4) - p_3(4)| &= \left| \frac{\sinh''''(\tau)}{4!} (4-0)(4-3)(4-6)(4-5) \right| \\ &= \frac{\sinh \tau}{3} \leq \frac{\sinh 6}{3} \doteq \frac{201.7}{3} \doteq 67.2 \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler:

$$|\sinh(4) - p_3(4)| \doteq |27.29 - 18.99| = 8.3$$

(iii) Man zeichne  $\sinh(x)$  und  $p_3(x)$  im Intervall  $[0, 6.5]$ .



**Bild 15 d)**  $\sinh x$  und  $p_3(x)$

e) Matlab-Programm zur Koeffizientenberechnung  
eines Newtonschen Interpolationspolynoms  
und Test am obigen Beispiel

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0 3 6]
>> y=[0 10 201.7]
>> newtonkoeff(x,y)
x =    0    3    6
y =    0  10.0000 201.7000

y =    0  10.0000  63.9000
y =    0   3.3333  63.9000
y =    0   3.3333  10.0944

ans =    0   3.3333  10.0944

>> x=[0 3 6 5]
>> y=[0 10 201.7 74.2]
>> newtonkoeff(x,y)
x =    0    3    6    5
y =    0  10.0000 201.7000  74.2000

y =    0  10.0000 201.7000 127.5000
y =    0  10.0000  63.9000 127.5000
y =    0   3.3333  63.9000 127.5000
y =    0   3.3333  63.9000  31.8000
y =    0   3.3333  10.0944  31.8000
y =    0   3.3333  10.0944   4.3411

ans =    0   3.3333  10.0944   4.3411
```

Mit dem Matlab-Programm

in der Datei 'newtonkoeff(x,y).m'

```
% INPUT:
% x=(x(1),...,x(n)) : Stützstellen
% y=(y(1),...,y(n)) : Stützwerte zu x

% OUTPUT:
% y=(y(1),...,y(n)) : Newtonkoeffizienten
%-----
function y = newton(x,y)
x
y
n = length(y);

for k = 2:n
    for i = n:-1:k
        y(i) = (y(i)-y(i-1))/(x(i)-x(i-k+1))
    end
end
end
```

## Spline-Interpolation

### Definition:

Ein **natürlicher kubischer Interpolations spline**

zu den Stützpunkten  $(x_k, y_k)$  mit  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

ist eine Funktion  $s : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

a)  $s(x_i) = y_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ ,

b)  $s \in C^2[x_0, x_n]$ ,

c) im Teilintervall  $I_j := [x_{j-1}, x_j[$  besitzt  $s$  für  $j = 1, \dots, n$  die Darstellung

$$s_j(x) := a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3,$$

d)  $s''(x_0) = 0 = s''(x_n)$ .

Berechnet werden müssen  $4n$  Koeffizienten  $a_j, b_j, c_j, d_j$ .

Diese ergeben sich aus den  $4n$  Gleichungen:

- $s_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$  und  $s_j(x_j) = y_j$  für  $j = 1, \dots, n$
- $s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j)$  für  $j = 1, \dots, n - 1$
- $s''_j(x_j) = s''_{j+1}(x_j)$  für  $j = 1, \dots, n - 1$
- $s''_1(x_0) = 0 = s''_n(x_n)$



## Momentenmethode

Berechnung der Koeffizienten  $a_j, b_j, c_j, d_j$ :

$M_j := s''(x_j)$  heißen **Momente** für  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Beim natürlichen Spline gilt  $M_0 = 0$  und  $M_n = 0$ .

Berechnung der übrigen Momente:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

Mit den Bezeichnungen

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}$$

$$D_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

Berechnung der Koeffizienten mit den Momenten

$$a_j = f_{j-1}, \quad b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{(2M_{j-1} + M_j)h_j}{6},$$

$$c_j = \frac{M_{j-1}}{2}, \quad d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

### Aufgabe 16:

- a) Man berechne den natürlichen kubischen Interpolations-spline  $s(x)$  zu folgenden Daten

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $k$   | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $x_k$ | 0 | 2 | 3 | 4 |
| $f_k$ | 4 | 0 | 1 | 4 |

Diese Daten wurden durch die Funktion  $f(x) = (x - 2)^2$  erzeugt.

Der kubische Interpolationsspline  $s(x)$  besitzt im Intervall  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  für  $j = 1, 2, 3$  die Darstellung

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3.$$

Die Koeffizienten  $a_j, b_j, c_j$  und  $d_j$  ergeben sich nach der Momentenmethode folgendermaßen:

Momente  $M_j := s''(x_j)$  für  $j = 0, 1, 2, 3$

Beim natürlichen Spline sind  $M_0 = 0$  und  $M_3 = 0$ .

Berechnung der übrigen Momente:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } h_j = x_j - x_{j-1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 1$$

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

$$\mu_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$$

und

$$D_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right) \quad \Rightarrow$$

$$D_1 = \frac{6}{3} \left( \frac{1 - 0}{1} - \frac{0 - 4}{2} \right) = 6,$$

$$D_2 = \frac{6}{2} \left( \frac{4 - 1}{1} - \frac{1 - 0}{1} \right) = 6$$

Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/3 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \frac{60}{23}, \quad M_2 = \frac{54}{23}$$

Mit den Momenten berechnen sich die Koeffizienten folgendermaßen:

$$a_j = f_{j-1}, \quad b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{(2M_{j-1} + M_j)h_j}{6},$$

$$c_j = \frac{M_{j-1}}{2}, \quad d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

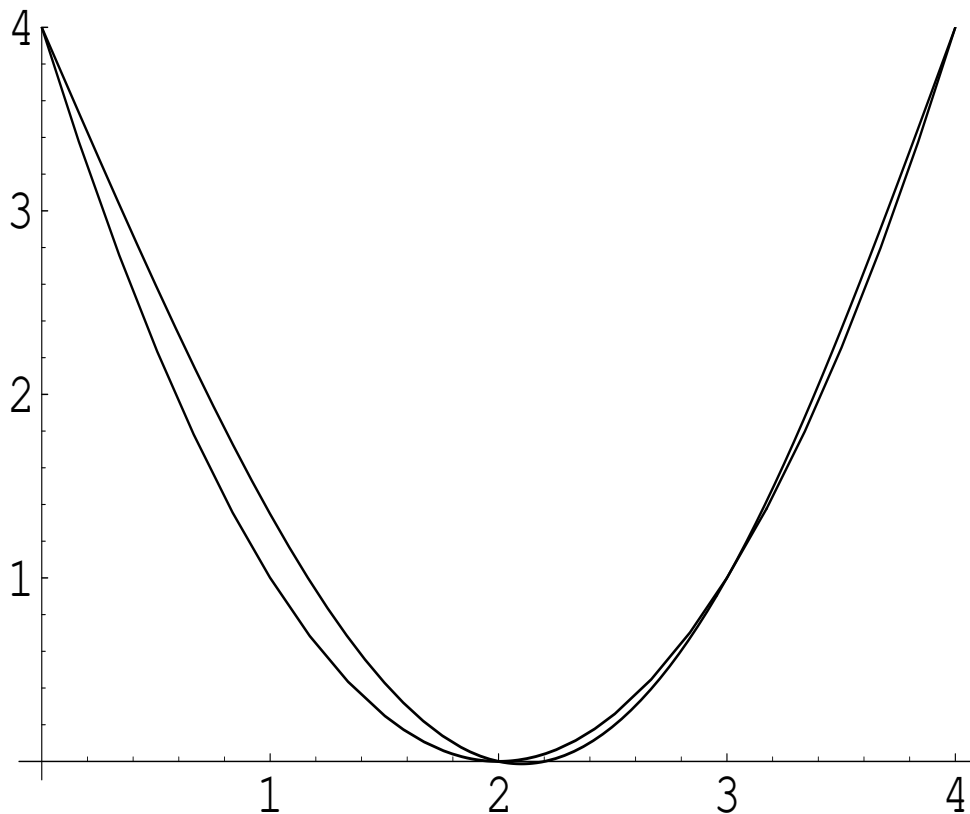
Man erhält für  $s(x)$  in den Intervallen  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  damit die Darstellungen

$$s_1(x) = 4 - \frac{66}{23}x + \frac{5}{23}x^3$$

$$s_2(x) = -\frac{6}{23}(x-2) + \frac{30}{23}(x-2)^2 - \frac{1}{23}(x-2)^3$$

$$s_3(x) = 1 + \frac{51}{23}(x-3) + \frac{27}{23}(x-3)^2 - \frac{9}{23}(x-3)^3.$$

b) Man zeichne die Funktionsgraphen von  $s(x)$  und  $f(x)$ .



**Bild 16 a)**  $f(x) = (x - 2)^2$  und  $s(x)$

c) Warum kann  $s(x)$  nicht mit  $f(x)$  übereinstimmen?

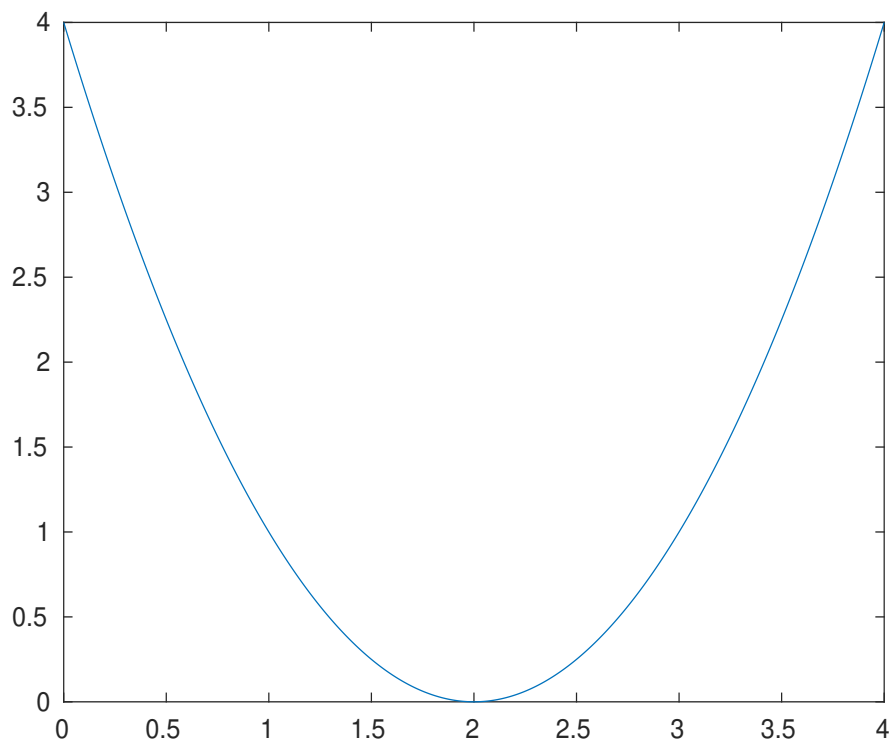
Der natürliche Spline  $s$  kann nicht mit  $f$  übereinstimmen, denn per Konstruktion gelten

$$M_0 = s''(0) = 0 = M_3 = s''(4) = 0, \text{ aber}$$

$$f''(0) = 2 = f''(4).$$

d) Man zeichne  $s(x)$  unter Verwendung der Matlab-Routinen 'spline', 'linspace', 'ppval' und 'plot'.

```
>> clear
>> x=[0 2 3 4];
>> f=[4 0 1 4];
>> s=spline(x,f);
>> t=linspace(0,4,1000);
>> y=ppval(s,t);
>> plot(t,y)
```



**Bild 16 b)**  $s(x)$