

Definition 3.19 (stückweise glatte Funktion)

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt **stückweise glatt**, wenn gilt:

- f ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in I nirgends häufen.
- In diesen Ausnahmepunkten t_i existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $f(t_i + 0)$ und $f(t_i - 0)$ sowie $f'(t_i + 0)$ und $f'(t_i - 0)$.
- In allen Punkten t_i ist der Funktionswert $f(t_i)$ das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$f(t_i) = \frac{1}{2}(f(t_i + 0) + f(t_i - 0)) .$$

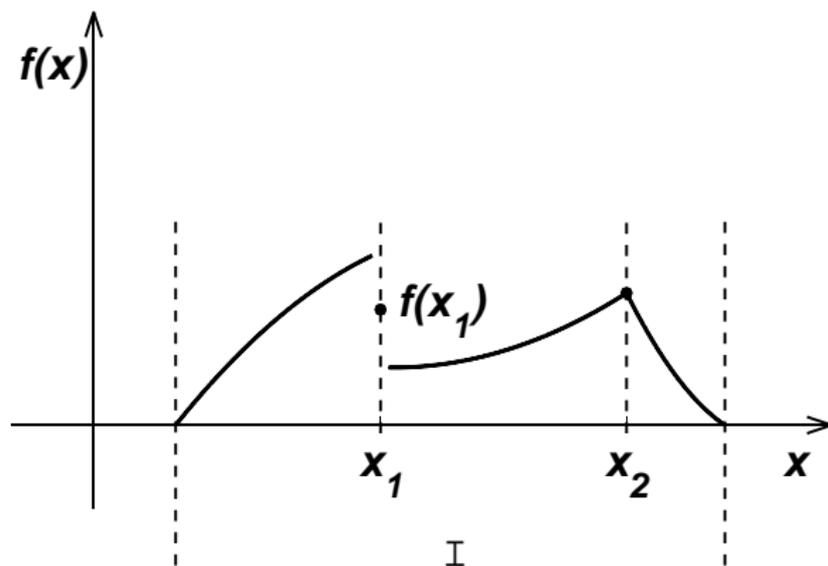


Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER-Reihe

- punktweise gegen f .
- In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.
- An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.

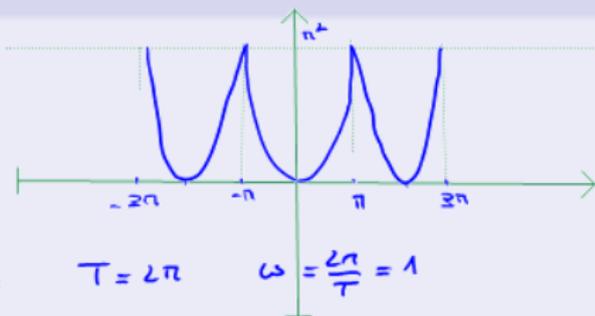
Beispiel

$$f(t) = t^2 \quad t \in [-\pi, \pi]$$

2π -periodisch

$b_k = 0$ da f gerade

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(kt) dt \quad T = 2\pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\underbrace{t^2 \frac{\sin(kt)}{k}}_0 \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2t \frac{\sin(kt)}{k} dt && \sin(k\pi) = \sin(0) = 0 \\
 &= -\frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt = -\frac{4}{k\pi} \left[t \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k} dt \\
 &= +\frac{4}{k^2\pi} \left[\pi \cos(k\pi) - 0 \right] - \frac{4}{k^2\pi} \left[\underbrace{\frac{\sin(kt)}{k}}_0 \right]_0^{\pi} = \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) = \frac{4}{k^2} (-1)^k
 \end{aligned}$$

Beispiel

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kt)$$

f stetig

$$F_f(t) = f(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt)$$

auf $[-\pi, \pi]$

$$t=0 : 0^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{3 \cdot 4} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$t=\pi : \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \implies \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k^2}$$

$$\implies \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Fourier-Koeffizienten

$$f_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad \text{Buch Kap. 3.9}$$

~~Beispiel~~

$$\|f - f_n\|_2^2 = \langle f - f_n, f - f_n \rangle = \frac{2}{T} = \frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - f_n(t))^2 dt$$

$$= \frac{2}{T} \left(\int_0^T (f(t))^2 - 2f(t)f_n(t) + (f_n(t))^2 dt \right) \quad (*)$$

$$\int_0^T f(t) f_n(t) dt = \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_0^T f(t) dt}_{\frac{T}{2} \cdot a_0} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \underbrace{\int_0^T f(t) \cos(kt) dt}_{\frac{T}{2} \cdot a_k} + \sum_{k=1}^n b_k \underbrace{\int_0^T f(t) \sin(kt) dt}_{\frac{T}{2} \cdot b_k}$$

$$= \frac{T}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) =: A_n$$

$$\int_0^T f_n(t) \cdot f_n(t) dt = \int_0^T \left(\underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)}_{\text{orthogonal}} \right) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right) dt$$

$$= \underbrace{\frac{a_0^2}{4} \int_0^T 1 dt}_{\frac{T}{2}} + \sum_{k=1}^n a_k^2 \underbrace{\int_0^T \cos(kt) \cos(kt) dt}_{\frac{T}{2}} + b_k^2 \underbrace{\int_0^T \sin(kt) \sin(kt) dt}_{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{a_0^2}{2} \cdot \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 = A_n$$

Einsetzen der Ergebnisse
in * \rightarrow

$$0 \leq \|f - f_n\|_2^2 = \frac{2}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt - \frac{2}{T} \cdot 2A_n + \frac{2}{T} A_n = \frac{2}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right)$$

$$B_n := \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt$$

↑
monoton steigend, beschränkt

Besselsche Ungleichung
s. Satz 3.30

$$\text{---} : \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{2}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt$$

Parseval'sche Gleichung
s. Satz 3.30

Macht alles nur Sinn wenn f^2 integrierbar



Definition

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt f **quadratisch integrierbar auf I** , wenn das Integral

$$\int_a^b |f(\tau)|^2 d\tau$$

existiert und konvergiert.

Satz 3.30: (BESSELSche Ungleichung)

Für alle T -periodischen und auf $[0, T]$ quadratisch integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt .$$

Dabei sind a_k, b_k die FOURIER-Koeffizienten von f .

Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich für quadratisch integrierbare Funktionen sogar die **Parseval'sche Gleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt .$$

Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Ist f eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode T , so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen f . Für ihre FOURIER-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

$T_m = U_m = \left\{ s_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; s_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right\}$ Unterraum mit Skalarprodukt
 Orthonormalbasis $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kt), \sin(kt) \quad k=1, \dots, m \right\}$ vgl. Übung, HÜ

Beste Approximation für f aus U_m bzgl. $\|\cdot\|_2$: Projektion von f auf U_m

Koeffizienten von $P(f)$ = Länge der Projektion von f auf Basiselemente: $\langle f, \text{Basiselement} \rangle$

$$P(f) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^m \underbrace{\left\langle f, \cos(kt) \right\rangle}_{a_k} \cos(kt) + \underbrace{\left\langle f, \sin(kt) \right\rangle}_{b_k} \sin(kt)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle f, 1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int f(t) dt}_{a_0}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)

Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten, T -periodischen Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom der Form s_m in der L_2 -Norm, d.h.

$$\|f - s_m\|_2^2 := \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) - s_m(t))^2 dt, \quad s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(k\omega t)$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt

$$\|f - s_m\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

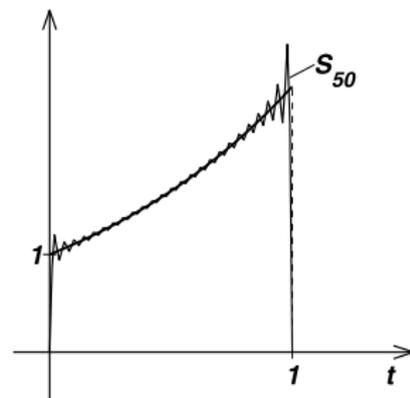
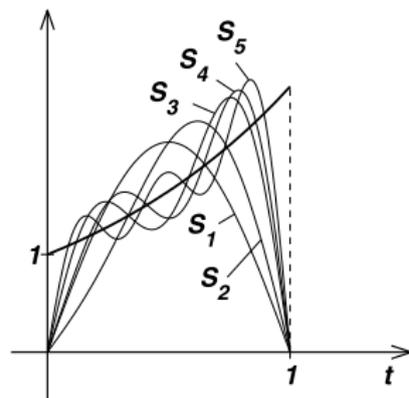


Abbildung 3.28-3.29: Approximation von e^t auf $[0, 1]$ durch trigonometrische Polynome bis zum Grade 5 (links) und mit Grad 50 (rechts)

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt

Dies ist so keine Fourier-Reihe!

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2} t + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k\omega}.$$

Also nicht zu verwechseln mit der F.R. der Stammfunktion von f!

$$\begin{aligned} \int_0^t F_f(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega\tau) + b_k \sin(k\omega\tau) \right] d\tau \\ &= \frac{a_0}{2} t + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} - \frac{b_k \cos(k\omega t)}{k\omega} + \frac{b_k \cos(0)}{k\omega} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} t + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k\omega} \end{aligned}$$

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)

Für $a_0 \neq 0$ ist dies keine Fourier-Reihe wegen $\frac{a_0}{2} t^1$!
 Nur dann = F.R. der Stammfkt wenn $a_0 = 0$

$$F(\tau) = \int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\text{F.R.}} F_F(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{a}_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$k \in \mathbb{N} \quad \tilde{a}_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(\tau) \cos(k\omega \tau) d\tau$$

$$= \frac{2}{T} \left[F(\tau) \frac{\sin(k\omega \tau)}{k\omega} \right]_0^T - \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \frac{\sin(k\omega \tau)}{k\omega} d\tau = -\frac{1}{k\omega} b_k \quad \text{wie oben}$$

$$\text{Analog } \tilde{b}_k = \frac{2}{T} \left[F(\tau) \frac{-\cos(k\omega \tau)}{k\omega} \right]_0^T - \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \frac{-\cos(k\omega \tau)}{k\omega} d\tau = -\frac{1}{k\omega} \cdot \frac{2}{T} F(T) + \frac{1}{k\omega} a_k$$

$$\tilde{b}_k = \frac{2}{T} \left[F(\tau) \frac{-\cos(k\omega \tau)}{k\omega} \right] - \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \frac{-\cos(k\omega \tau)}{k\omega} d\tau = \frac{1}{k\omega} \cdot \frac{2}{T} F(T) + \frac{1}{k\omega} a_k$$

Nach nachrechnen: $\tilde{a}_0 = 2 \sum b_k/k\omega$ wenn $a_0 = 0$

0 wenn $a_0 = 0$ wie oben

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Eine gliedweise Differentiation ist nur möglich, wenn die Ableitungsreihe konvergent ist. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k \omega \sin(k\omega t) + b_k k \omega \cos(k\omega t).$$

\uparrow \uparrow
 $k \rightarrow \infty !$

Bsp. Seite 170-172 gerechnet für

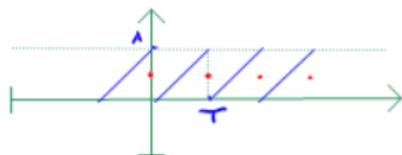
$$a_0 = A \quad a_k = 0 \quad b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

$k \in \mathbb{N}$

$$F f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{A}{k\pi} \sin(k\omega t) = g(t)$$

$$\dot{g}(t) = 0 - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cancel{k} \omega \cos(k\omega t)$$

$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t \quad t \in (0, T)$
 periodisch fortgesetzt



Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

$$\dot{g}(t) = -\frac{Aw}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\frac{2\pi}{T}t)$$

$$t=0 \quad \dot{g}(0) = -\frac{Aw}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} 1 \quad \downarrow \text{keine Konvergenz}$$

$$t=\frac{T}{2} \quad \dot{g}\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{Aw}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) = -\frac{Aw}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \quad \downarrow$$

Beispiel Vorlesung 10: Schwingung, $x(t)$ = Auslenkung aus Ruhelage

Gesucht Funktion $x(t)$ mit:

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \quad (\text{I})$$

+ Äußere T-periodische Kraft u

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + cx(t) = \underline{\underline{u(t)}} \quad (\text{II})$$

Lösung von I nach Vorlesung 10:
(falls $r^2 - 4mc < 0$) $x_h(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} (a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t))$

Bestimme eine Lösung $x_p(t)$ von II, dann:

$$\text{Lösungen von II} = x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

Idee: Entwickle $u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$

$$\text{oder } u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Ansatz: $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega t}$

suche α_k
habe γ_k

Beispiel

$$\dot{x}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik\omega) e^{ik\omega t}$$

$$\ddot{x}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik\omega)^2 e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (-1)k^2\omega^2 e^{ik\omega t}$$

Falls die beteiligten Reihen konvergieren:

$$m \ddot{x}(t) + r \dot{x}(t) + c x(t) = k(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -mk^2\omega^2 \cdot \alpha_k e^{ik\omega t} + r ik\omega \cdot \alpha_k e^{ik\omega t} + c \cdot \alpha_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Die $e^{ik\omega t}$ bilden ein orthonormalsystem

→ Koeffizienten links und rechts müssen gleich sein!

$$(-mk^2\omega^2 + irk\omega + c) \cdot \alpha_k \cdot e^{ik\omega t} = \gamma_k e^{ik\omega t}$$

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{(c - mk^2\omega^2) + i(rk\omega)}$$

$$|\alpha_k| < \frac{|\gamma_k|}{r|k\omega|}$$

Beispiel

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega t}$$

$$a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$$

$$x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} \underbrace{(a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t))}_{\text{beschränkt}} + x_p(t)$$

\downarrow \downarrow
 ∞ 0

Auf Dauer Lösung \rightarrow periodische Funktion $\rightarrow 0$

Reelle Darstellung wieder über $a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$
 $b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$