**Aufgabe 1)**

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{11x^2 + 5}{x^3 + x}\, dx\,.$$

b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers $K$, der bei der Drehung des Funktionsgraphen von

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{4 - 2x} \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

um die $x$-Achse entsteht.

**Lösung der Aufgabe 1)** [7 + 3]?

a) $x^3 + x = x(x^2+1)\,.$

Ansatz: $$\frac{11x^2 + 5}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die Koeffizienten errechnen sich aus der Bedingung

$$a(x^2+1) + x(bx+c) = 11x^2 + 5\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Also $(a+b)x^2 + cx + a = 11x^2 + 5\,.$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad a = 5\,, \\ x^1 &: \quad c = 0\,, \\ x^2 &: \quad a+b = 11 \underset{a=5}{\Longrightarrow} b = 6\,. \qquad \textbf{[2 punkte]} \end{aligned}$$

Somit also

$$\begin{aligned} \int \frac{11x^2 + 5}{x^3 + x}\, dx &= \int \frac{5}{x} + \frac{6x}{x^2+1}\, dx \qquad u = x^2+1,\, 2x\,dx = du \\ &= 5\ln(|x|) + 3\int \frac{1}{u}\, du = 5\ln(|x|) + 3\ln(|u|) + C \\ &= 5\ln(|x|) + 3\ln(x^2+1) + C\,. \qquad \textbf{[3 punkte]} \end{aligned}$$

b) Volumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx = \pi \int_0^2 (4 - 2x) \cdot e^x\, dx\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Partielle Integration: Mit $u(x) = 4 - 2x$ und $v(x) = e^x$ liefert:

$$V = \pi \left( (4 - 2x) \cdot e^x \big|_0^2 - \int_0^2 (-2) \cdot e^x\, dx \right)\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \pi \left( -4e^0 + 2\, e^x\big|_0^2 \right) = (2e^2 - 6)\pi\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

**Aufgabe 2)** (5+5 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k \cdot k^2} \cdot (x-5)^k$$

und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) := \frac{2}{6+3x},$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und geben Sie das Konvergenzintervall der Entwicklung an.

**Lösung:** (5+5 Punkte)

a) mit $a_k = \dfrac{4}{3^k \cdot k^2}$ rechnet man

$$\begin{aligned} r &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{4 \cdot (k+1)^2 \cdot 3^{k+1}}{3^k \cdot k^2 \cdot 4} \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ &= \lim_{k\to\infty} 3 \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} = \lim_{k\to\infty} 3 \cdot (\frac{k+1}{k})^2 . \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ &= \lim_{k\to\infty} 3 \cdot (1 + \frac{1}{k})^2 = 3 . \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert in $]2,8[$ . Im Randpunkt $x_1 = 2 = 5-3$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-3)^k}{3^k \cdot k^2} = 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} .$$

Im Randpunkt $x_2 = 8 = 5+3$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (3)^k}{3^k \cdot k^2} = 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Nach Analysis I konvergiert die Reihe auch in den Randpunkten.

Die Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [2,8]$ gilt. **(2 Punkte)** b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{6+3x} = \frac{2}{6+3(x-1)+3} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-1)} \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{3}(x-1)} \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}(x-1)\right)^k \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{9}(-1)^k \frac{1}{3^k}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{3^{k+2}}\,(x-1)^k
\end{aligned}$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt, konvergiert die Potenzreihe genau dann, wenn

$\left|-\frac{1}{3}(x-1)\right| < 1 \iff -3 < x-1 < 3$ also $x \in ]-2,4[$ gilt. **[1 Punkt]**