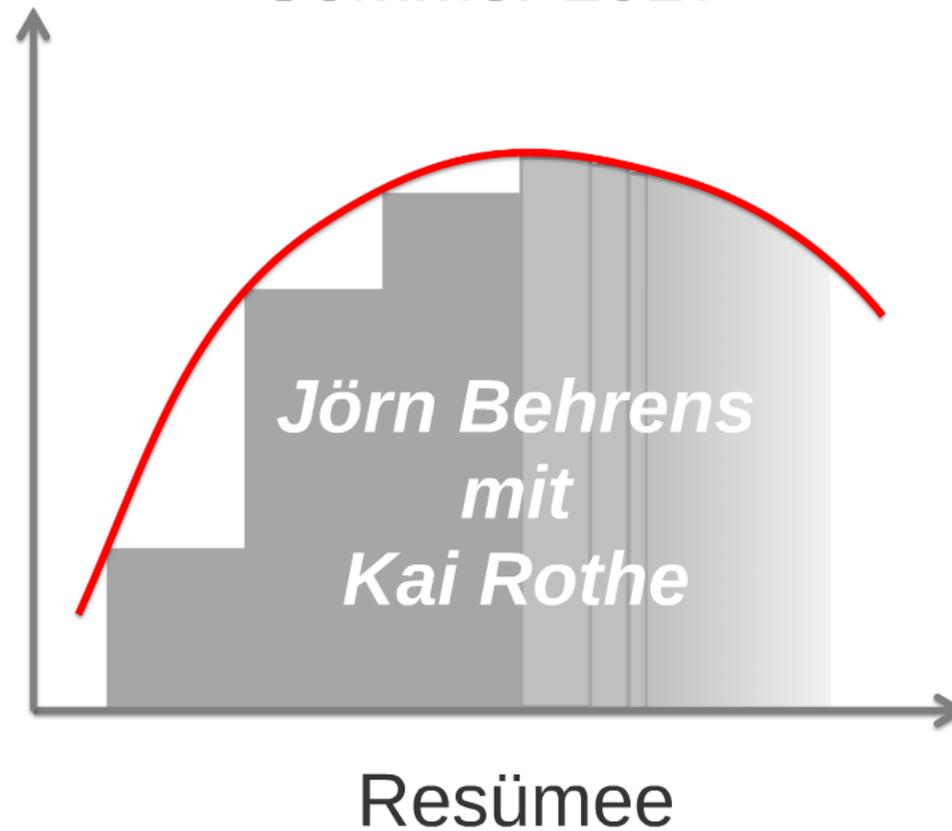


Analysis II

Sommer 2017



Logik+Ungleichungen

Logische Aussagen und Operationen

Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Negation:

A oder $\neg A$ definiert durch $\omega(A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

Konjunktion: $A \wedge B$

$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternativ: $A \vee B$

$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$

$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$

$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitstabellen: Beispiel Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitstabelle ist gültig:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow \bar{A}$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \bar{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Rechenregeln für Ungleichungen

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

- $\forall c \in \mathbb{R} : a + c > b + c$
- $\forall c \in \mathbb{R}, c > 0 : a \cdot c > b \cdot c$
- $\forall c \in \mathbb{R}, c < 0 : a \cdot c < b \cdot c$
- $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$
- $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$
- $\forall n \in \mathbb{N} : a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$
- $\forall n \in \mathbb{N} : a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Ungleichungen – Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \Rightarrow x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \Rightarrow ax < ay.$$

Logische Aussagen und Operationen

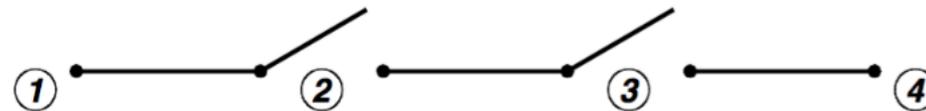
Postulat: Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein, ein Drittes gibt es nicht.

Negation:

\bar{A} oder $\neg A$ definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

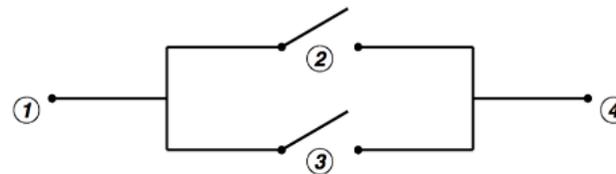
Konjunktion: $A \wedge B$

$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = W$.



Alternative: $A \vee B$

$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$, und $\omega(B) = F$.



Implikation: $A \Rightarrow B$

$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$, und $\omega(B) = F$.

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$

$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

Wahrheitstabelle: Beispiel Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitstabelle ist gültig:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \implies B$	$\bar{B} \implies \bar{A}$	$(A \implies B) \iff (\bar{B} \implies \bar{A})$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Ungleichungen – Axiome

Axiom 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelte genau eine der Beziehungen:

$$x < y \quad x = y \quad x > y.$$

Axiom 2: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a < y + b.$$

Axiom 3: Es gelte die Implikation:

$$x < y \wedge 0 < a \quad \Rightarrow \quad ax < ay.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Rechenregeln: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$. Dann gilt:

1. $\forall c \in \mathbb{R} : a + c > b + c$

2. $\forall c \in \mathbb{R}, c > 0 : a \cdot c > b \cdot c$

3. $\forall c \in \mathbb{R}, c < 0 : a \cdot c < b \cdot c$

4. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, falls $a > b > 0$

5. $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$

6. $\forall n \in \mathbb{N} : a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

7. $\forall n \in \mathbb{N} : a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Zahlenräume

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

- 1) $A(n_0)$ wahr,
 - 2) für alle $2 \leq k \in \mathbb{N}$ $A(k-1) \Rightarrow A(k)$ ist wahr $\Rightarrow A(k) = 1$ ist wahr
- gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Natürliche Zahlen Peano Axiome

Einige Axiome zur Charakterisierung der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen.

- 1) $1 \in \mathbb{N}$ ist die kleinste Zahl.
- 2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise $2=1+1, 3=2+1$, usw.).
- 3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 4) Die Nachfolger einer natürlichen Zahl n sind verschieden: zwei Zahlen (für zwei verschiedene natürliche Zahlen) sind genau dann gleich, wenn sie den gleichen Nachfolger haben.
- 5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
1) $1 \in A$,
2) für alle $n \in \mathbb{N}$ $n \in A \Rightarrow n' \in A$.
Dann $\mathbb{N} \subseteq A$.

Ganze Zahlen

Problem: $m + x = n$ ist nur lösbar, falls $m \geq n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $m + x = n$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: \mathbb{Z} abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Komplexe Zahlen

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition

1. Menge \mathbb{C} mit $0 \in \mathbb{C}$, $1 \in \mathbb{C}$ und $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.
 $\forall a, b \in \mathbb{C} \exists a+b, a-b, a \cdot b, a:b$
Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
 2. Elemente: $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$
- Induktionsprinzip: $\forall a, b \in \mathbb{C}$ $(a+b) + c = a + (b+c)$
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
 $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Rechenring: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\text{Kern } \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\}$

Reelle Zahlen

Problem: $x^2 - 2$ ist nicht lösbar in \mathbb{Q} !

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufwändiger als bei rationalen Zahlen. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 \dots$$

für $x = \sqrt{2}$

- Diese Rechen mit diesen unendlichen Dezimalbrüchen muss man sich im Kopf, meist auf Rechnergebnisse in Form endlicher Dezimalbrüche verlassen.

Rationale Zahlen

Problem: $a \cdot x = n$ ist nur lösbar in \mathbb{Z} , falls a Teiler von n !

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \left\{ a = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd} \right\}$$

ein. Dann hat $a \cdot x = n$ in \mathbb{Q} die Lösung $x = \frac{n}{a}$ mit $a, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- Teilweise definiert in \mathbb{R} , da nur durch Brüche oder Quotienten ausgedrückt werden kann. \mathbb{Q} ist kein abgeschlossener Körper, $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- \mathbb{Q} ist ein Körper. (Körper ist ein Ring, der kommutativ ist, ein Einselement hat und jedes Element invertierbar ist.)

Natürliche Zahlen

Peano Axiome

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen

- 1) 1 ist eine natürliche Zahl.
- 2) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise $2=1'$, $3=2'$ usw.).
- 3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 4) die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
- 5) Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit
 - (i) $1 \in A$,
 - (ii) $n \in A \implies n' \in A$.Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Prinzip vollständige Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) $A(n_0)$ ist wahr,

2) für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$: $A(k)$ ist wahr $\implies A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Ganze Zahlen

Problem: $n + x = m$ ist nur lösbar, falls $m > n$!

Lösung: Führe

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$$

ein. Dann hat $n + x = m$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Also: \mathbb{Z} abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation

Rationale Zahlen

Problem: $n \cdot x = m$ ist nur lösbar in \mathbb{Z} , falls n Teiler von m !

Lösung: Führe

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a, b \text{ teilerfremd} \right\}$$

ein. Dann hat $n \cdot x = m$ in \mathbb{Q} die Lösung $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- " a, b teilerfremd" \Rightarrow Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind keine eigenständigen Elemente in \mathbb{Q}
- Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $\text{ggT}(a, b) = 1$

Reelle Zahlen

Problem: $x \cdot x = 2$ ist nicht lösbar in \mathbb{Q} !

Lösung: Führe

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}$$

ein.

Bemerkungen:

- Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 \dots$$

für $x = \sqrt{2}$

- Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen

Komplexe Zahlen

Idee: Führe Zahlenraum ein, der $\sqrt{-1}$ enthält.

Definition:

1. Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $z := a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
 a heißt *Realteil* von z : $a =: \operatorname{Re}z$,
 b heißt *Imaginärteil* von z : $b =: \operatorname{Im}z$
2. Gleichheit: Für $z_1 = a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ gelte:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

Insbesondere $z = a + bi = 0$ falls $a = 0 \wedge b = 0$.

3. Konjugiert komplexe Zahl \bar{z} : zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$.
4. Betrag $|z|$: zu $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – denn $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}z = 0\}$

Funktionen

Definition Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
heißt reelle Funktion einer Veränderlichen. Schreibweise $x \in D$ für unabhängige Veränderliche und $y = f(x)$ für abhängige Veränderliche.
• $D = \{x\} \subset \mathbb{R}$ heißt Wertebereich der Funktion f .
• $\mathbb{R} = \{y\} \subset \mathbb{R}$ heißt Wertebereich der Funktion f .

Umkehrfunktion

Sei $f: A \rightarrow B$ bijektive Funktion.
• Jedem $a \in A$ ist genau ein $y = f(a) \in B$ zugeordnet.
• Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $a \in A$ zugeordnet.
Also existiert $f^{-1}: B \rightarrow A$ mit
 $f^{-1}(y) = a$, falls $y = f(a)$.
 f^{-1} heißt Umkehrfunktion (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Verkettete Funktionen

Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: C \rightarrow D$ mit $B \subseteq C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert
 $h = g \circ f: A \rightarrow D$.
 $h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder verkettete Funktion.

Elementare Funktionen

Elementare Funktionen:
Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen darstellen lassen, heißen elementare Funktionen.

Polynome (arationalen Funktionen):

$$f(x) = y = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \neq 0, \quad a_n \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$n \in \mathbb{N}$: Grad, $a_k, k = 1, \dots, n$ ($k = 1 \dots n$) Koeffizienten des Polynoms

Supremum/Infimum

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion.

- Sei f nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von f heißt **Supremum** von f : $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Sei f nach unten beschränkt. Die größte untere Schranke von f heißt **Infimum** von f : $\inf_{x \in D} f(x)$.

Unter den Bedingungen an f existieren $\sup f$ und $\inf f$ in \mathbb{R} und sind eindeutig!

Periodische Funktion

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion. f heißt **periodisch**, falls $a > 0$ existiert, so dass $f(x)$ alle $x \in D$ auch $x+a \in D$, und

$$f(x+a) = f(x).$$

a heißt **Periode** von f . Die kleinste Periode von f , $a_{\min} = \min\{a\}$, heißt **primitive Periode**.

Monotone Funktion

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt **monoton steigend** falls für $x, y \in I$ gilt:
 $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- Falls sogar gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, so heißt f **streng monoton steigend**.
- Umgekehrt heißt f **monoton fallend** falls für $x, y \in I$ gilt:
 $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- Falls sogar gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, so heißt f **streng monoton fallend**.

Gerade/ungerade Funktion

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

- f heißt **gerade** falls für alle $x \in D$ gilt:
 $f(x) = f(-x)$.
- f heißt **ungerade** falls für alle $x \in D$ gilt:
 $f(x) = -f(-x)$.

Definition

Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f .
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f .

Umkehrfunktion

Sei $f : A \rightarrow B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \rightarrow A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Verkettete Funktionen

Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ mit $B \subset C$.

Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.

Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \rightarrow D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Supremum/Infimum

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion.

- Sei f nach oben beschränkt. Die kleinste obere Schranke von f heißt *Supremum* von f : $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Sei f nach unten beschränkt. Die größte untere Schranke von f heißt *Infimum* von f : $\inf_{x \in D} f(x)$.

Unter den Bedingungen an f existieren $\sup f$ und $\inf f$ in \mathbb{R} und sind eindeutig!

Monotone Funktion

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, $I \subset D$ Intervall.

- f heißt *monoton steigend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, so heißt f *streng monoton steigend*.
- Umgekehrt heißt f *monoton fallend* falls für $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

- Falls sogar gilt $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, so heißt f *streng monoton fallend*.

Gerade/ungerade Funktion

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ Funktion, D symmetrisch bezüglich $x = 0$.

- f heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = f(-x).$$

- f heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = -f(-x).$$

Periodische Funktion

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion. f heißt *periodisch*, falls $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$, und

$$f(x + \alpha) = f(x).$$

α heißt *Periode* von f . Die kleinste Periode von f , $\alpha_{\min} = \min\{\alpha\}$ heißt *primitive Periode*.

Elementare Funktionen

Elementare Funktionen:

Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen darstellen lassen, heißen *elementare Funktionen*.

Polynome (ganz rationale Funktionen):

$$f(x) = y = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0, \quad a_k, x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N};$$

n heißt *Grad*, a_k , $k = 1, \dots, n$ ($k = 1 : n$) *Koeffizienten* des Polynoms.

Grenzwerte und Stetigkeit

Umgebung/Häufungspunkt

Definition: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt δ -Umgebung von x_0 .
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ eine ϵ -Umgebung von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt **offene Menge** in \mathbb{R} , wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt **Randpunkt**, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\tilde{x} \in D$.
- a heißt **Häufungspunkt** von D , wenn in jeder δ -Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a, x \in D$, existiert.

Nullstellen-/Zwischenwertsatz

Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$). Dann besitzt f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle.

Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq \bar{y} \leq f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\bar{x}, a \leq \bar{x} \leq b$ mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Also, nimmt eine stetige Funktion f jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Grenzwert

Definition: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Ein Wert $g \in \mathbb{K}$ heißt **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle a , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta, x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

Stetigkeit

Definition:

- Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **linksseitig stetig** im Punkt $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **rechtsseitig stetig** im Punkt $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig** im Punkt $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **auf D stetig**, wenn für alle $x_0 \in D$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Unstetigkeitsstellen

Bemerkung:

- Falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind (Sprungstelle), so ist x_0 eine **Unstetigkeitsstelle erster Art**.
- Falls mindestens einer der beiden einseitigen Limes $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ nicht existiert oder unregelmäßig ist, so ist x_0 eine **Unstetigkeitsstelle zweiter Art**.
- Von einer **oszillierenden Unstetigkeit** in $x_0 = 0$ spricht man beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Bemerkung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = g = \lim_{x \searrow x_0} f(x), \text{ aber } f(x_0) \neq g$$

so ist f in x_0 unstetig. Aber die Funktion

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq x_0 \\ g, & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

ist stetig. x_0 heißt **hebbare Unstetigkeitsstelle**.

Umgebung/Häufungspunkt

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt **δ -Umgebung** von x_0 .
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ eine **ϵ -Umgebung** von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt **offene Menge** in \mathbb{R} , wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt **Randpunkt**, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\bar{x} \in D$ und ein $\tilde{x} \notin D$.
- a heißt **Häufungspunkt** von D , wenn in jeder δ -Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a, x \in D$, existiert.

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle a , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

Stetigkeit

Definition:

1. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **linksseitig stetig** im Punkt $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **rechtsseitig stetig** im Punkt $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig** im Punkt $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ offene Teilmenge. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **auf D stetig**, wenn für alle $x_0 \in D$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Unstetigkeitsstellen

Bemerkung:

- Falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ beide existieren, aber verschieden sind (Sprungstelle), so ist x_0 eine **Unstetigkeitsstelle erster Art**.
- Falls mindestens einer der beiden einseitigen Limite $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ nicht existiert oder uneigentlich ist, so ist x_0 eine **Unstetigkeitsstelle zweiter Art**.
- Von einer **oszillatorischen Unstetigkeit** in $x_0 = 0$ spricht man beispielsweise bei der Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Bemerkung: Gilt an $x_0 \in D$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = g = \lim_{x \searrow x_0} f(x), \text{ aber } f(x_0) \neq g$$

so ist f in x_0 unstetig. Aber die Funktion

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq x_0 \\ g, & \text{falls } x = x_0, \end{cases}$$

ist stetig. x_0 heißt **hebbare Unstetigkeitsstelle**.

Nullstellen-/Zwischenwertsatz

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$). Dann besitzt f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq \bar{y} \leq f(b)$. Dann existiert mindestens ein \bar{x} , $a \leq \bar{x} \leq b$ mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Also, nimmt eine stetige Funktion f jeden Wert \bar{y} zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. Für $x_0, x \in I$ ist der **Differenzenquotient** definiert durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Bezeichnungen: Der Grenzwert wird mit

$$f'(x_0), \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{oder} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

bezeichnet und **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f in x_0 genannt.

Satz von Bernoulli-L'Hospital

Satz (Bernoulli-L'Hospital)

Seien $I =]a, b[$ offenes Intervall, $a, b \in]a, b[$ mit $\hat{O}(x_0)$ Umgebung von x_0 .
 $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen, differenzierbar für alle $x_0 \in \hat{O}(x_0) \cap I$
 (möglichweise mit Ausnahme von x_0 selbst). Sei weiter

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{0, \infty, -\infty\}.$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in \hat{O}(x_0) \cap I, x \neq x_0$.

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{0, \infty, -\infty\}$$

gilt (d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder ungerichteten Sinn existiert), dann gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht!

Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g)' = (f'(g(x)))' \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Die math. Veränderung nimmt von x zu y .
 Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f .

Höhere Ableitungen

Bemerkung: Sei $f^{(n-1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

die **n-te Ableitung** von f .

Extre

Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall. Für $x_0, x \in I$ ist der **Differenzenquotient** definiert durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

Definition: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
 f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Bezeichnungen: Der Grenzwert wird mit

$$f'(x_0), \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{oder} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

bezeichnet und **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f in x_0 genannt.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar.
Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht!
Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Umkehrfunktion: Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Die unabh. Veränderliche nennen wir wieder x .

Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f .

Höhere Ableitungen

Bemerkung: Sei $f^{(n-1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

die n -te Ableitung von f .

Satz von Bernoulli-L'Hospital

Satz (Bernoulli-L'Hospital)

Seien $I =]a, b[$ offenes Intervall, $x_0 \in [a, b]$ mit $U(x_0)$ Umgebung von x_0 .

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen, differenzierbar für alle $x_0 \in U(x_0) \cap I$ (möglicherweise mit Ausnahme von x_0 selbst). Sei weiter

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in I} g(x) = \{0, \infty, -\infty\}.$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$.

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gilt (d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), dann gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Extrema/Nullstellen

(Lokale) Extrema

Definition: Die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in a_0 ein **lokales Maximum** (Minimum), falls es eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\epsilon(x_0).$$

$f(x_0)$ ist also **größter** (kleinster) Funktionswert in der ϵ -Umgebung.

- a_0 heißt **Maximalstelle** (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt **lokales Maximum** (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 **echte lokale Maximalstelle** (Minimalstelle) und $f(x_0)$ **echtes lokales Maximum** (Minimum).
- Statt lokal sagt man auch **relativ**.

Notwendige/hinreichende Bedingungen für Extrema

Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein lokales Maximum (Minimum) von f . Dann gilt $f'(a) = 0$.

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein Punkt, an dem $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) < 0$ (> 0) gilt. Dann ist a eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle).

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein Punkt, an dem $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) < 0$ (> 0) gilt. Dann ist a eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle).

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein Punkt, an dem $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) < 0$ (> 0) gilt. Dann ist a eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle).

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein Punkt, an dem $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) < 0$ (> 0) gilt. Dann ist a eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle).

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein Punkt, an dem $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) < 0$ (> 0) gilt. Dann ist a eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle).

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in I$ ein Punkt, an dem $f'(a) = 0$ ist und $f''(a) < 0$ (> 0) gilt. Dann ist a eine lokale Maximalstelle (Minimalstelle).

Newton-iteration

Satz (Newton-Verfahren): Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1-K)^n.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle α in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen α , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_0)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Satz von Rolle/Mittelwertsatz

Satz (Rolle): Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Falls $f(a) = f(b)$ existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Fixpunktiteration

Satz (Banachscher Fixpunktsatz): Sei $f: I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\alpha \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

(Lokale) Extrema

Definition: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein **lokales Maximum** (Minimum), falls es eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\epsilon(x_0).$$

$f(x_0)$ ist also größter (kleinster) Funktionswert in der ϵ -Umgebung.

- x_0 heißt **Maximalstelle** (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales **Maximum** (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 **echte** lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum).
- Statt *lokal* sagt man auch **relativ**.

Notwendige/hinreichende Bedingungen für Extrema

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema) **Satz:** (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

- a) $f'(x_0) = 0$, oder
- b) x_0 ist Randpunkt von I .

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.

Satz von Rolle/Mittelwertsatz

Satz (Rolle): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Falls $f(a) = f(b)$ existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Newton-iteration

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ ($r > 0$) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle \bar{x} in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen \bar{x} , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Fixpunktiteration

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

Taylor-Entwicklung

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ($k = 0 : n$):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Taylor-Polynom

Definition:

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

heißt **Taylor-Polynom** n -ten Grades für die Funktion f .

- x_0 heißt dann die **Entwicklungsstelle**.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen **Schmiegeparabeln** an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n + 1)$ -mal differenzierbar.

Sei weiter $x_0 \in I$ fest.

Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0 , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel** mit dem Restglied $R_n(x)$ in der **Schlömilch-Form**.

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ($k = 0 : n$):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Taylor-Polynom

Definition:

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

heißt **Taylor-Polynom** n -ten Grades für die Funktion f .

- x_0 heißt dann die **Entwicklungsstelle**.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen **Schmiegeparabeln** an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n + 1)$ -mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.

Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0 , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel** mit dem Restglied $R_n(x)$ in der **Schlömilch-Form**.

Kurve: Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^2)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt** $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- **Endpunkt** $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- **Spur** $\{\mathbf{x}(t) \mid a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i ($i = 1 : r$), wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} ($i = 2 : r$) entspricht, heißt **Kurve**.

Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^{\top}$ heißt **Tangentenvektor**,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^{\top}$ heißt **Normalenvektor**,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^{\top}$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung

Definition (Mathematisch Formal):

Die **Krümmung** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^{\top}$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^{\top}$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{y}(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^{\top}$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt **Krümmungsradius**.

Integrale

Unbestimmtes Integral/Stammfunktion

Definition:

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f . Ist F Stammfunktion von f , so heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt **Integrationskonstante**.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.

Uneigentliches Integral

Definition: (Uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $a < c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx \\ \text{b) } \int_a^\infty f(x) dx &:= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

- Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,
- unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Integrationsregeln

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):

Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Satz (Substitutionsregel):

Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

- $\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int f(t) dt$, mit $t = \phi(x)$,
- $\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$, mit $x = \phi(t)$.

Bemerkung (Partielle Integration):

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx, \text{ bzw.} \\ \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Riemann-Integral

Definition: (Riemannsches Integral)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f **Riemann-integrierbar**, falls $I_f = J_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- a heißt **untere**, b **obere Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$ heißt **Integrationsintervall**,
- x heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$ heißt **Integrand**.

Hauptsätze

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

mit $a, x \in I$ eine Stammfunktion von f .

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I . Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Unbestimmtes Integral/Stammfunktion

Definition:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f . Ist F Stammfunktion von f , so heißt der Ausdruck

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, **unbestimmtes Integral** der Funktion f .

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f .
- Die Funktion f heißt **Integrand**.

Integrationsregeln

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx.$$

Satz (Substitutionsregel):

Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I . Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt$, mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$, mit $x = \phi(t)$.

Bemerkung (Partielle Integration):

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx, \text{ bzw.}$$
$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Riemann-Integral

Definition: (Riemannsches Integral)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f **Riemann-integrierbar**, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- a heißt untere, b obere **Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$ heißt **Integrationsintervall**,
- x heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$ heißt **Integrand**.



Hauptsätze

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F , gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

mit $x, a \in I$ eine Stammfunktion von f .

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I .

Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Uneigentliches Integral

Definition: (Uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\text{a) } \int_a^b f(x) dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{b) } \int_a^\infty f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

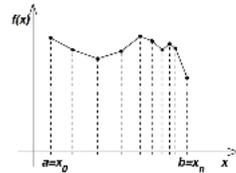
- a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,
- b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Numerische Integration

Trapezregel

Trapezregel:
Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und seien $y_i = f(x_i)$, dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1})$$



Berechnungsidee:
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe \times Breite):

$$\frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1})$$

Simpsonregel

Idee:
Berechne das Integral des Interpolationspolynoms!

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx.$$

Verallgemeinerung:
Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und n äquidistante Stützstellen, also $[x_{i-1}, x_i] = \Delta x$, $i = 1, \dots, n$ gerade angenommen.

- Dann existieren Teilintervalle $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ($i = 1, \dots, n/2$) so dass

$$[x_{2i-2}, x_{2i}] = \bigcup_{j=1}^2 [x_{2i-2}, x_{2i-1}],$$

- Dort muss für $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ die Werte $y_{2i-2} = f(x_{2i-2})$, $y_{2i-1} = f(x_{2i-1})$, $y_{2i} = f(x_{2i})$ und die Werte des Polynom $q_{2i}(x)$ mit $q_{2i}(x_{2i-2}) = y_{2i-2}$, $q_{2i}(x_{2i-1}) = y_{2i-1}$, $q_{2i}(x_{2i}) = y_{2i}$.

- Das Integral $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx$ ist dann gegeben durch die **Kompositen Formel:**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} q_{2i}(x) dx.$$

- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der **Simpson-Regel:**

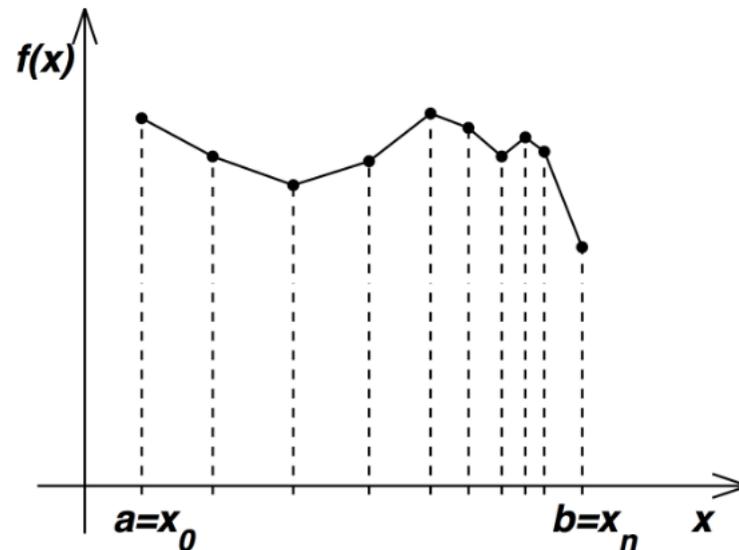
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_{2i}(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + \dots + 4y_{n-2} + y_n]$$

Trapezregel

Trapezregel:

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und seien $y_i = f(x_i)$, dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1})$$



Berechnungsidee:

Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe \times Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

Simpsonregel

Idee:

Berechne das Integral des Interpolationspolynoms!

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx.$$

Verallgemeinerung:

Sei (x_i, y_i) ($i = 0, \dots, n$) mit $x_i = a + ih$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ äquidistante Stützstellen, also $[x_0, x_n] = [a, b]$. $n = 2m$ sei gerade angenommen.

- Dann existieren Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ($k = 1, \dots, m$) so dass

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^m [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

- Bestimme für $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ die Wertepaare $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$, und Berechne das Polynom $p_2(x)$ mit $p_2(x_{2k-j}) = y_{2k-j}$ ($j = 0, 1, 2$).
- Das Integral im Teilintervall $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ist dann gegeben durch die **Kepplersche Fassregel**:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der **Simpson-Regel**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x) dx \\ &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \end{aligned}$$

Interpolation

Interpolationsproblem

Problemstellung (Interpolationsproblem)

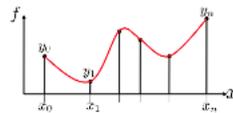
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

mit **Stützstellen** x_i und **Werten** y_i gegeben ($i = 0, 1, \dots, n$).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$



Lagrange-Interpolation

Satz: (Lagrange-Polynom)

Das Polynom $p_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)y_j$ mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem. $p_n(x)$ heißt **Lagrange-Polynom**. $L_j(x)$ sind Produkte aus n Linearfaktoren und daher Polynome n -ten Grades.

Bemerkung:

Es gibt nur ein Polynom p_n vom Grad n das die Bedingungen

$$p_n(x_i) = y_i$$

für $i = 0, \dots, n$ erfüllt.

Newton-Interpolation

Bemerkung: (Newton-Interpolation)

• Ansatz:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

• Bestimme b_i , so dass $p_n(x_i) = y_i$, erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} y_0 &= b_0 \\ y_1 &= b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\ y_2 &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ y_n &= b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + \\ &\quad b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Interpolationsproblem

Problemstellung: (Interpolationsproblem)

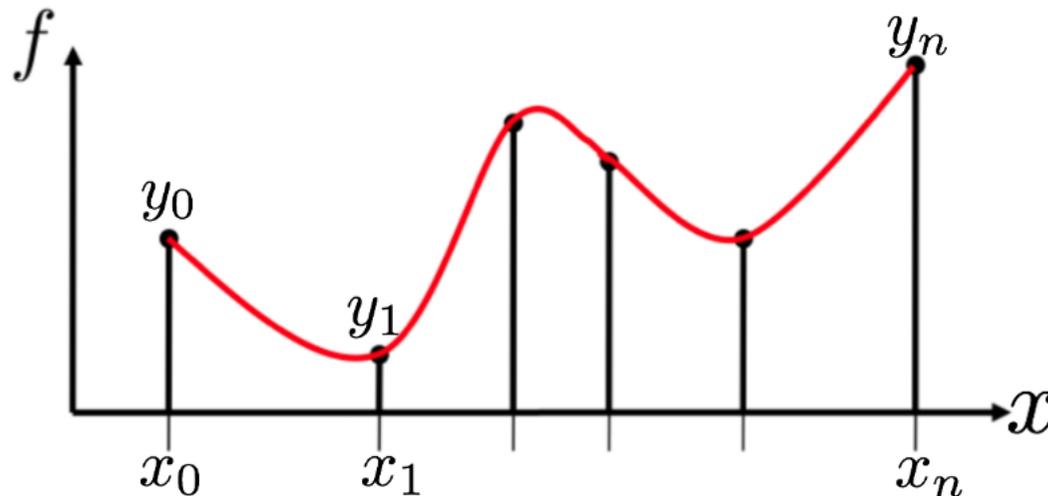
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

mit **Stützstellen** x_k und **Werten** y_k gegeben ($k = 0, 1, \dots, n$).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$



Lagrange-Interpolation

Satz: (Lagrange-Polynom)

Das Polynom $p_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)y_j$ mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem. $p_n(x)$ heißt **Lagrange-Polynom**
 $L_j(x)$ sind Produkte aus n Linearfaktoren und daher Polynome n -ten Grades.

Bemerkung:

Es gibt nur ein Polynom p_n vom Grad n das die Bedingungen

$$p_n(x_i) = y_i$$

für $i = 0, \dots, n$ erfüllt.

Newton-Interpolation

Bemerkung: (Newton-Interpolation)

- Ansatz:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

- Bestimme b_i , so dass $p_n(x_i) = y_i$, erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

$$y_0 = b_0$$

$$y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

\vdots

$$y_n = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

Funktionenfolgen und -reihen

Zahlenreihen

Definition: (Unendliche Reihe)
Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n) :

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

(s_n) heißt **unendliche Reihe** (oder kurz **Reihe**). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch **Glieder der Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Funktionenreihe

Definition (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D . Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(s_n) heißt **unendliche Reihe** oder **Reihe der Funktionen** (f_k) .
 f_k heißen **Glieder** der Reihe und s_n **Teil- oder Partialsommen**.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Sin/Cos (als Reihe)

Definition: (Sinus und Cosinus)
Auf ganz \mathbb{R} sind folgende Reihen konvergent:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Die so erklärten Funktionen heißen **Sinus- und Cosinus Funktion**.

Cauchy-Kriterium

Satz: (Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit auf D beschränkten Funktionen f_k konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k \right|_x < \epsilon.$$

Exponentialfunktion (als Reihe)

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt **Exponentialfunktion**.

Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Zahlenreihen

Definition: (Unendliche Reihe)

Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n) :

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

(s_n) heißt **unendliche Reihe** (oder kurz **Reihe**). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch **Glieder der Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Funktionenreihe

Definition: (Funktionenreihe)

Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D . Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(s_n) heißt **unendliche Reihe** oder **Reihe der Funktionen** (f_k) .
 f_k heißen **Glieder** der Reihe und s_n **Teil- oder Partialsummen**.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Cauchy-Kriterium

Satz: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit auf D beschränkten Funktionen f_k konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} < \epsilon.$$



Exponentialfunktion (als Reihe)

Definition: (Exponentialfunktion)

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt **Exponentialfunktion**.

Satz: (Additionstheorem)

Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Sin/Cos (als Reihe)

Definition: (Sinus und Cosinus)

Auf ganz \mathbb{R} sind folgende Reihen konvergent:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Die so erklärten Funktionen heißen **Sinus- und Cosinus Funktion**.

Fourier-Reihen

Fourier-Polynom

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] ?$$

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)

Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die **Fourier Koeffizienten** a_n, b_n berechnen durch die **Fourier-Analyse**:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Komplexe Schreibweise

Bemerkung: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n, b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

Interpolierendes Fourier-Polynom

Satz: (Interpolierendes Fourier-Polynom)

Es seien $k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) **Werte** $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$ einer 2π -periodischen Funktion an den äquidistant verteilten **Stützstellen** $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$ gegeben. Das spezielle **Fourier-Polynom** vom Grad n

$$g_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)) = \frac{a_0^*}{2} \cos(nx)$$

mit Koeffizienten

$$a_0^* = \frac{2}{k} (y_0 + y_1 + \dots + y_k)$$

$$a_m^* = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} y_j \cos\left(\frac{m \cdot 2\pi \cdot j}{k}\right)$$

$$b_m^* = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} y_j \sin\left(\frac{m \cdot 2\pi \cdot j}{k}\right)$$

ist das eindeutig bestimmte interpolierende Polynom zu den gegebenen Stützstellen, d.h. es gilt:

$$g_n^*(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, k.$$

Definition: (Unen Betrachte Zahlenf und erhalte neue Z

(∞_n) heißt **unendlich**

Die Glieder a_n der

Fourier-Polynom

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] ? \end{aligned}$$

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)

Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die **Fourier-Koeffizienten** a_n, b_n berechnen durch die **Fourier-Analyse**:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise

Bemerkung: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

Interpolierendes Fourier-Polynom

Satz: (Interpolierendes Fourier-Polynom)

Es seien $k = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) **Werte** $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k = y_0$ einer 2π -periodischen Funktion an den äquidistant verteilten **Stützstellen** $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$ gegeben. Das spezielle **Fourier-Polynom** vom Grad n

$$g_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)] + \frac{a_n^*}{2} \cos(nx)$$

mit Koeffizienten

$$a_0^* = \frac{2}{k} (y_0 + y_1 + \dots + y_n)$$

$$a_m^* = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (y_j \cos(m \frac{j2\pi}{k}))$$

$$b_m^* = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (y_j \sin(m \frac{j2\pi}{k}))$$

ist das eindeutig bestimmte interpolierende Polynom zu den gegebenen Stützstellen, d.h. es gilt:

$$g_n^*(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, k.$$

Anwendung

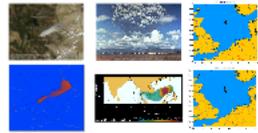
Advections-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = 0$$

Spurenstoff (ggfs. multi-Komponenten)
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^1, \mathbf{x} = \mathbf{x}^T$
 Gegebenes Windfeld
 $\mathbf{v} : \mathbb{D} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 Gegebener Diffusionskoeffizient
 $\mu : \mathbb{D} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

Spurenstoff-Ausbreitung

Beispiele



Atmosphärische Schadstoffe / Vulkan Asche Ölunfälle

Lösungs-Perspektiven

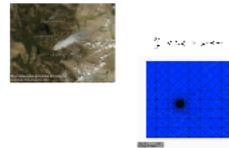


Algorithmus

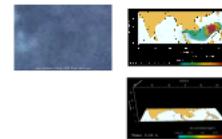
Angewandt auf viele Punkte eines Gitters ergibt das einen Algorithmus:



Schadstoff-Ausbreitung



Vulkanasche-Ausbreitung

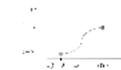


Formalisierung

Position kann beschrieben werden durch Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Mit Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$



Lösung der Transportgleichung

Max-Dirichlet

$$p = \max\{0, \dots\}$$

Möge auf der rechten Seite eine Wertebereich sein, der ein Maximum über die gesamte rechte Seite des Gitters hat.

$$p = \max\{0, \dots\}$$

Bemerkung: Max-Dirichlet ist eine lokale Methode.

Lagrange Transport

Die Gleichung mit Quellterm:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = q$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^T, t = t$$

Die Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = q$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = q$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = q$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = q$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}p) - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = q$$



Lösung der Trajektoriengleichung

Problem: In der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

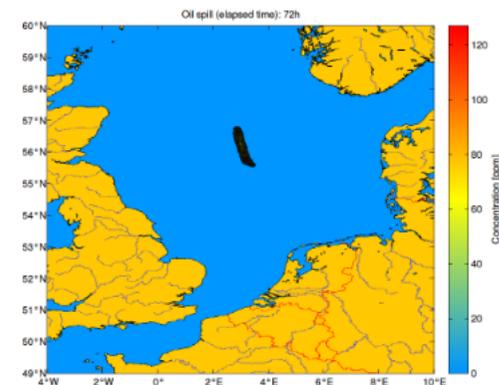
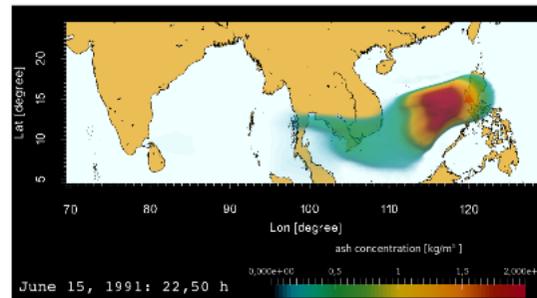
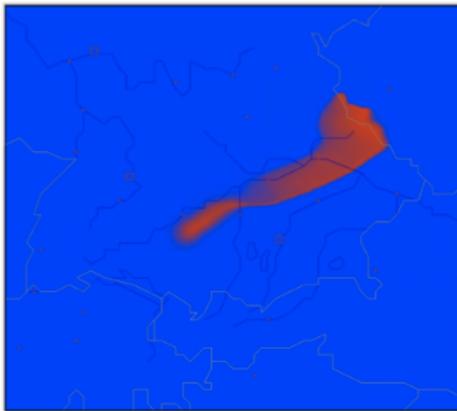
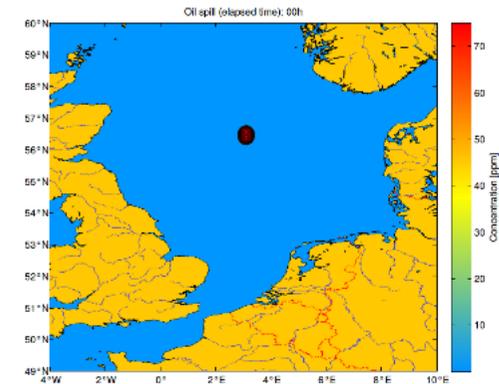
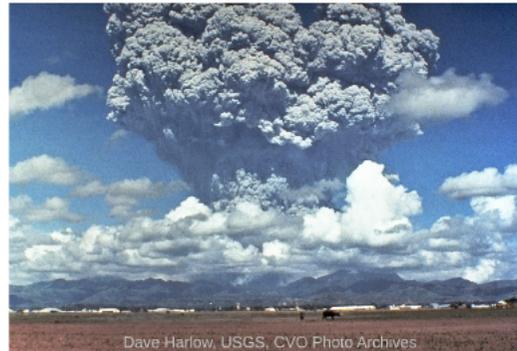
tritt \mathbf{x} auf beiden Seiten auf und ist unbekannt.

Eine Möglichkeit: **Fixpunktiteration!**

Bemerkung: Bessere Möglichkeiten lernt man in der Vorlesung Differentialgleichungen nächstes Semester.

Spurenstoff-Ausbreitung

Beispiele



Atmosphärische Schadstoffe Vulkan Asche

Öl-Unfälle

Advections-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) + \nabla \cdot (\mu \nabla \rho) = 0$$



Spurenstoff (ggfls. multi-Komponenten)

$$\rho : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

Gegebenes Windfeld

$$\mathbf{v} : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^d$$

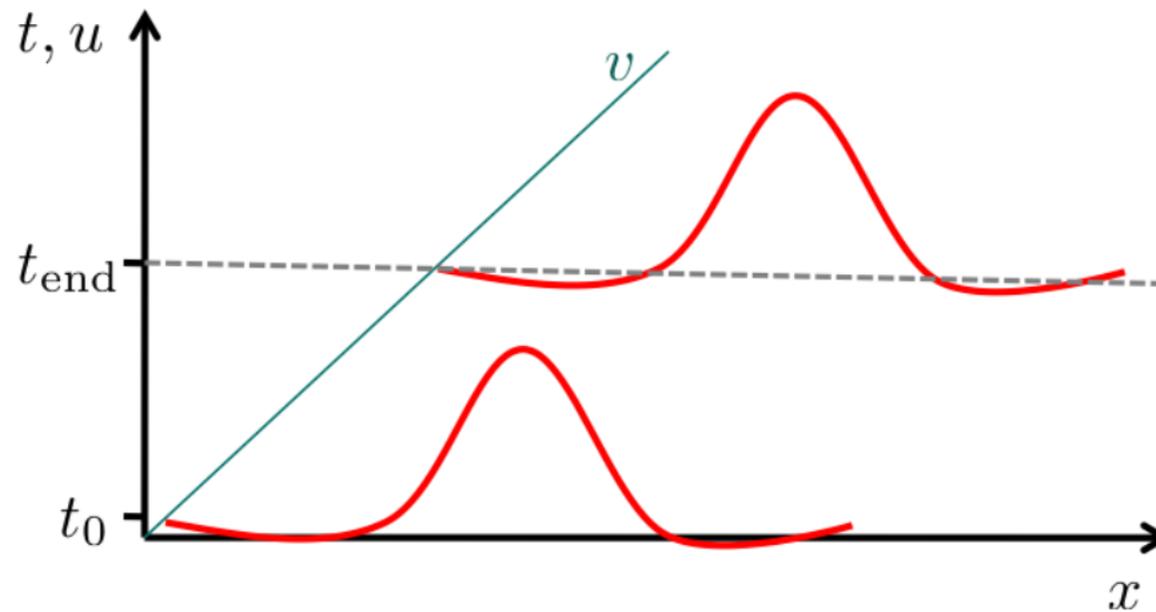
Gegebener Diffusionskoeffizient

$$\mu : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

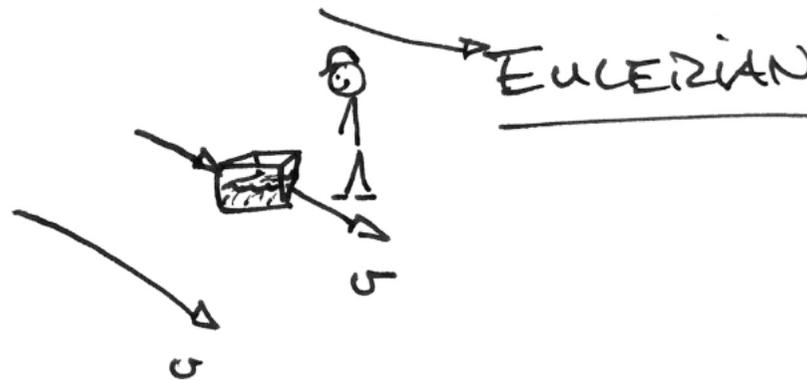
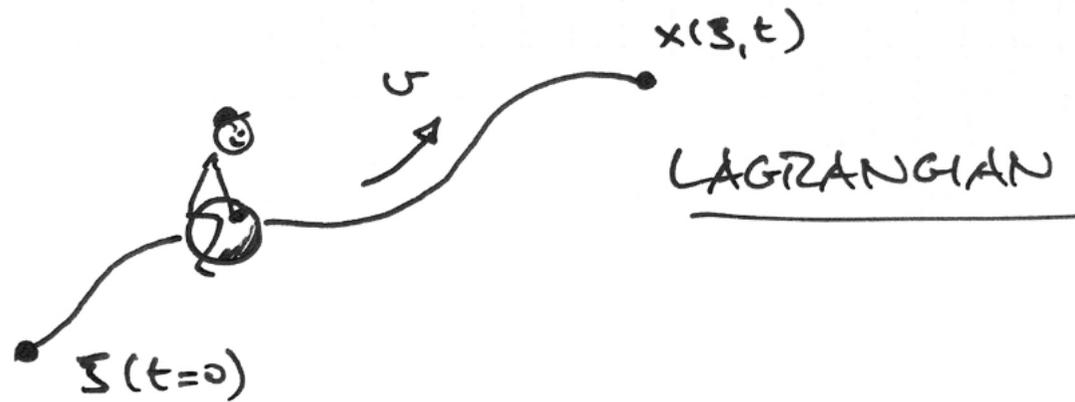
Vereinfachung: 1D Advektion

Beispiel: lineare Advektion mit konstantem Wind

$$\frac{du}{dt} + v \cdot \frac{du}{dx} = 0; \quad v \equiv 1$$



Lösungs-Perspektiven



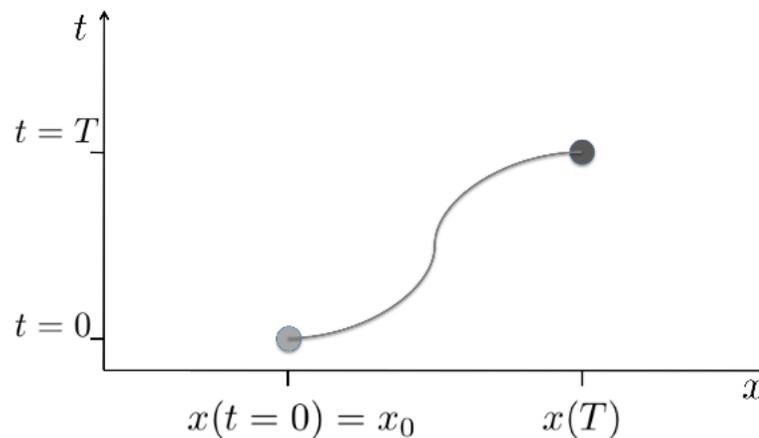
Formalisierung

- Position: $x = x(t)$.
- Velocity: $v = v(x, t)$.

Position kann berechnet werden durch Lösung von

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

Mit Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$



Lagrange Transport

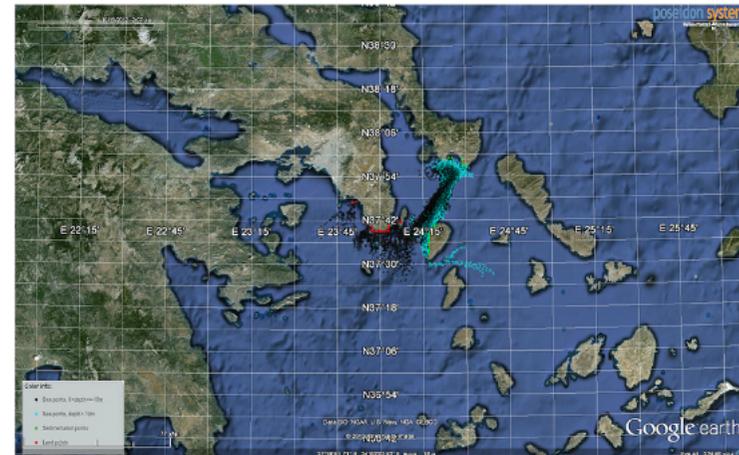
Die Gleichung (mit Quellterm):

$$\frac{d\rho}{dt} = s(x, t)$$

mit $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Bemerkung: Mit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $\dot{x} = v(x, t)$ erhalten wir

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = s(x, t).$$



<http://www.medess4ms.eu/oil-spill-models>

Zusammenfassung: Es müssen also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x, t), & x(0) &= x_0, \\ \dot{\rho} &= s(x, t), & \rho(x, 0) &= \rho_0(x). \end{aligned}$$

Bemerkung: Häufig werden in realen Simulationen sehr viele Partikel verwendet!

Lösung der Trajektoriengleichung

Problem: In der Gleichung

$$\dot{x} = v(x, t)$$

tritt x auf beiden Seiten auf und ist unbekannt.

Eine Möglichkeit **Fixpunktiteration!**

Bemerkung: Bessere Möglichkeiten lernt man in der Vorlesung *Differentialgleichungen* nächstes Semester.

Lösung der Transportgleichung

Idee: Die Gleichung

$$\dot{\rho} = s(x, t)$$

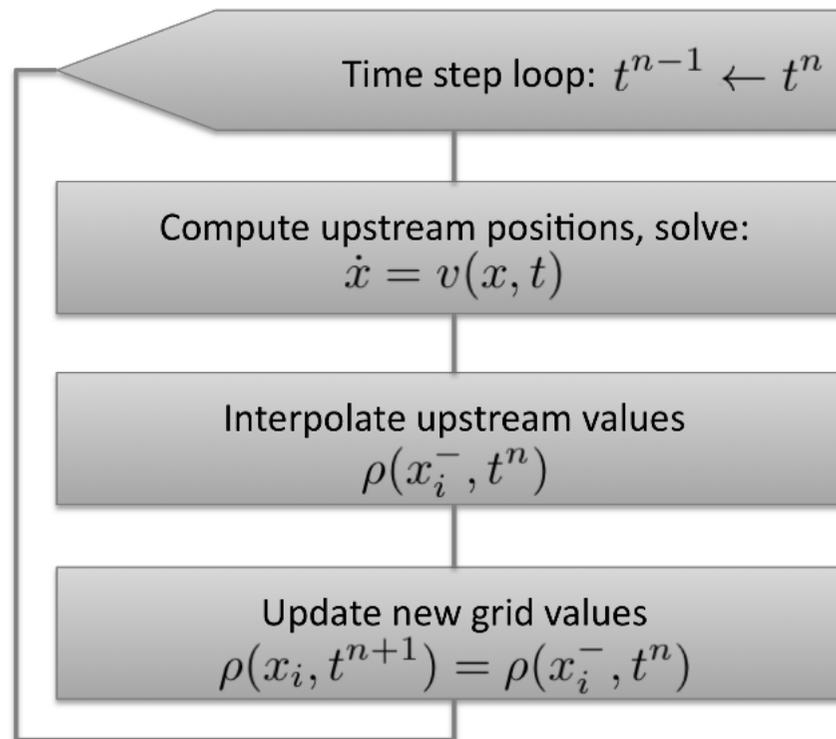
hängt auf der rechten Seite nicht von ρ ab und daher kann man den Differentialoperator näherungsweise schreiben:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \approx \frac{\rho(x(t + \Delta t), t + \Delta t) - \rho(x(t), t)}{\Delta t}$$

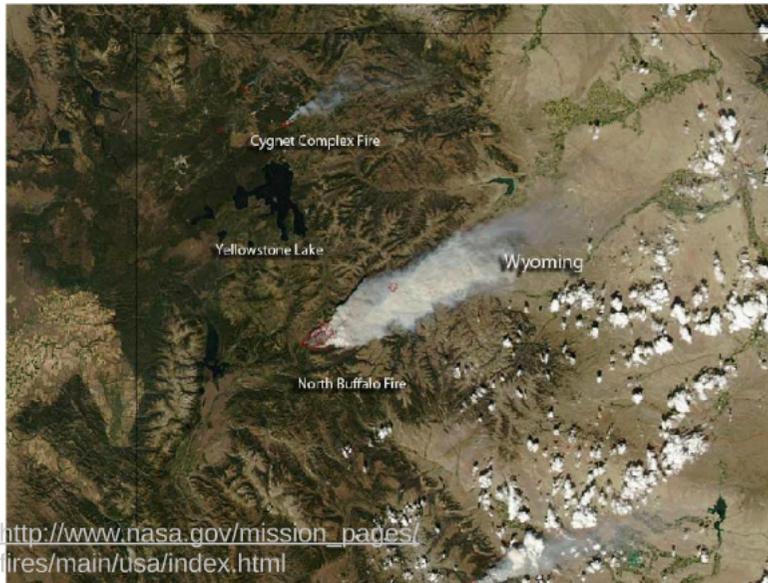
Bemerkung: Man nennt diese Methode *finite Differenzen Methode*.

Algorithmus

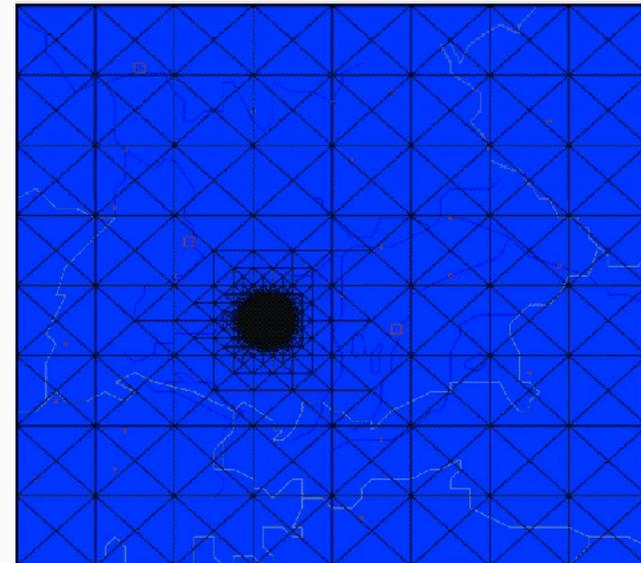
Angewandt auf viele Punkte eines Gitters ergibt das einen Algorithmus:



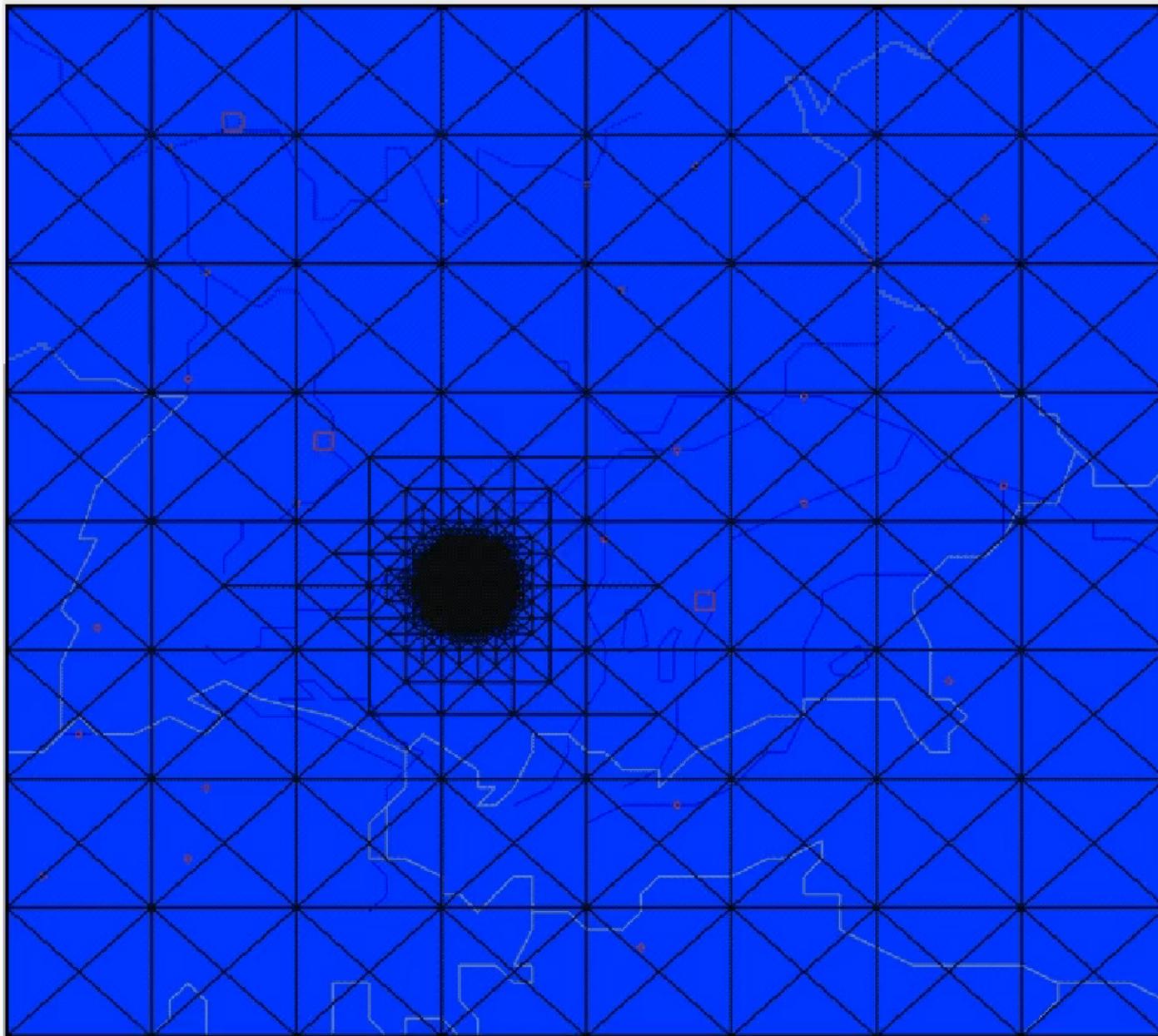
Schadstoff-Ausbreitung



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + \nabla \cdot (\mu \nabla \rho) = 0$$

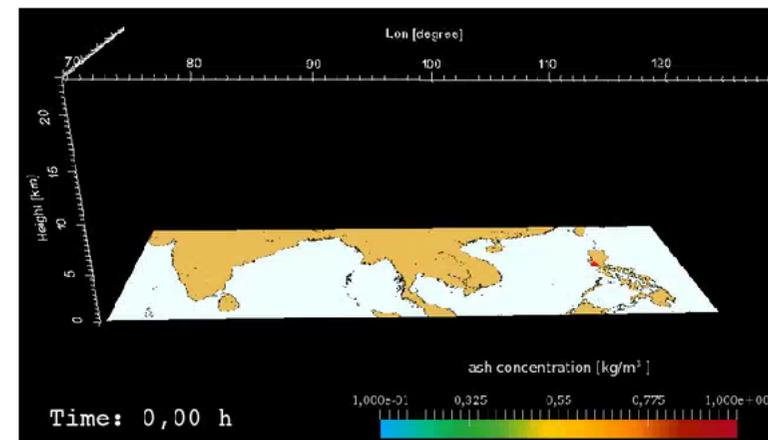
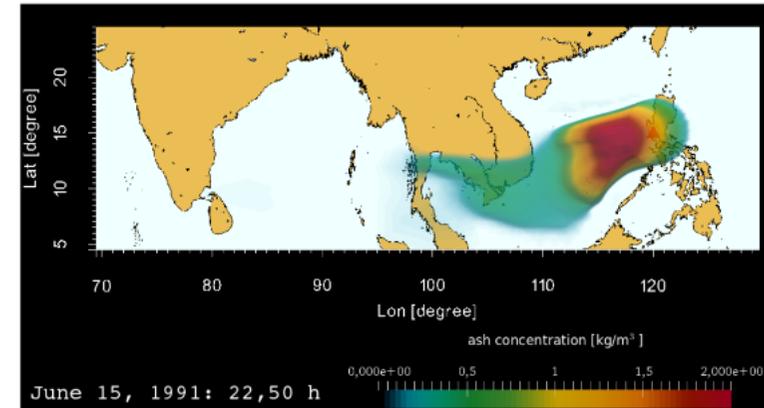


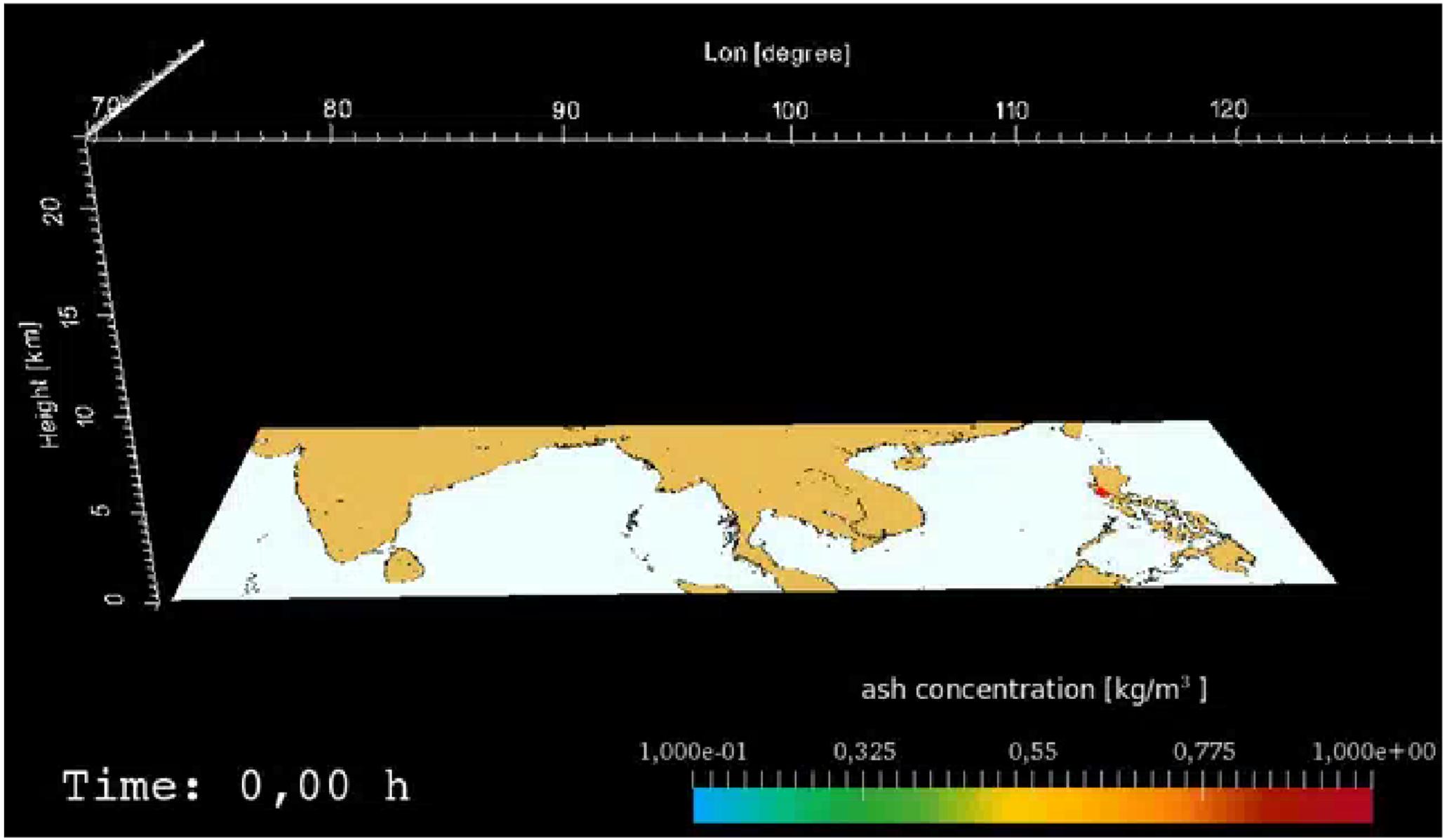
Time (h): 0.00
(c) J. Dehrens 1998
Program: flash90



Time (h): 0.50
(c) J. Behrens 1999
Program: Flash90

Vulkanasche-Ausbreitung





Logik+Ungleichungen

Aussagenlogik
 Mengen
 Induktion
 Ungleichungen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen
 Konvergenz
 Glattheit
 Parseval-Formel

Zahlenräume

reelle Zahlen
 komplexe Zahlen
 Vektorräume
 Skalarprodukt

Funktionenfolgen und -reihen

Funktionenfolgen
 Grenzfunktion
 Weierstraßkriterium

Funktionen

Funktionen
 Grenzwerte
 Stetigkeit
 Ableitungen

Interpolation

Interpolation
 Lagrange-Interpolation
 Newton-Interpolation

Analysis II



Grenzwerte und Stetigkeit

Grenzwerte
 Stetigkeit
 Ableitungen
 Differentialrechnung

Anwendung

Anwendungsgebiete
 Optimierung
 Integralrechnung
 Differentialgleichungen

Numerische Integration

Numerische Integration
 Trapezregel
 Simpsonregel
 $k =$

Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit
 Ableitungen
 Kettenregel
 Produktregel

Integrale

Integrale
 Riemannsumme
 Substitutionsregel
 Partielle Integration

Extrema/Nullstellen

Extrema
 Nullstellen
 Ableitungen
 Newton-Verfahren

Kurven

Kurven
 Parametrisierung
 Tangentenebene
 Krümmung

Taylor-Entwicklung

Taylor-Entwicklung
 Potenzreihen
 Restglied
 Approximation