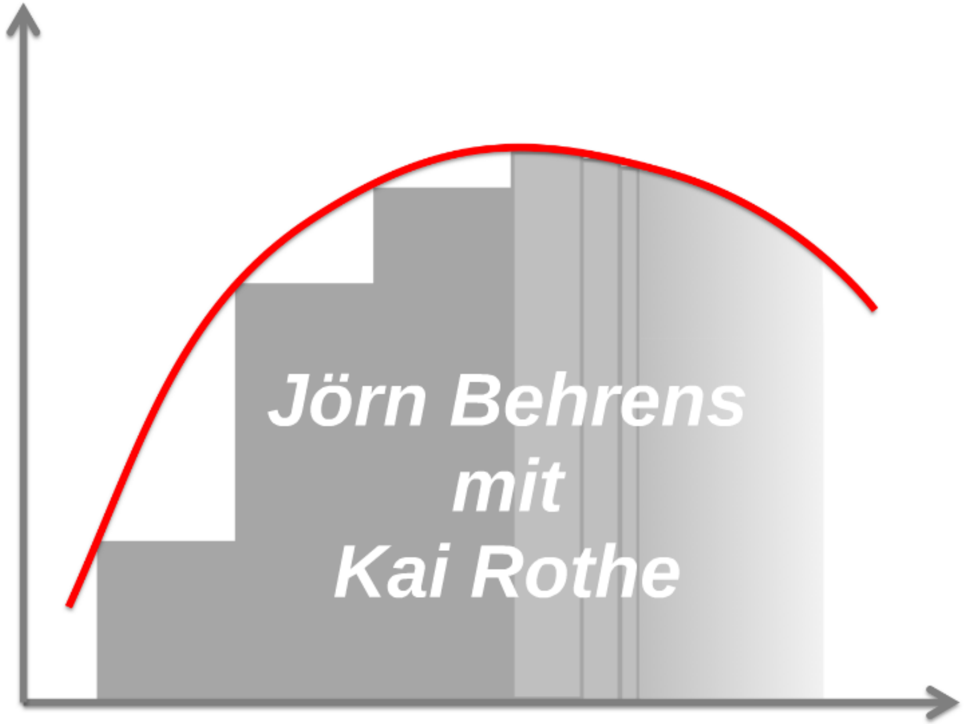
Analysis II

Sommer 2017



Fourier-Reihe

Buch Kapitel 3.8-3.9

Erinnerung: Trigonometrisches Funktionensystem

Definition: (Trigonometrisches Funktionssystem)
Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$.

Ziel:
Periodische Funktionen mit Hilfe des trigonometrischen Funktionensystems darstellen!

Bemerkung: Jede L-periodische Funktion f lässt sich durch die Transformation

$$\hat{f}(t) = f(t\frac{L}{2\pi})$$

in eine 2π-periodische Funktion $\hat{f}$ umwandeln. (Betrachte also 2π-periodische Funktionen).

Orthogonalitätsrelationen für trigonometrisches Funktionensystem:
Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\ dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\ dx &= \delta_{nk}\pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\ dx &= \delta_{nk}\pi.
\end{aligned}$$

Dabei ist das Kronecker-Symbol:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)
Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die Fourier Koeffizienten a_n, b_n berechnen durch die Fourier-Analyse:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \quad n = 1, 2, \dots .
\end{aligned}$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
*1768 Auxerre †1830 Paris

Frage: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion. Lässt sich dann eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$ finden?

Die Partialsummen (s_m) werden durch die trigonometrischen Polynome

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \dots$$

definiert.

Definition: (Trigonometrisches Funktionssystem)
Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$.

Ziel:
Periodische Funktionen mit Hilfe des trigonometrischen Funktionensystems darstellen!

Bemerkung: Jede L-periodische Funktion f lässt sich durch die Transformation

$$\hat{f}(t) = f(t\frac{L}{2\pi})$$

in eine 2π-periodische Funktion $\hat{f}$ umwandeln. (Betrachte also 2π-periodische Funktionen).

Orthogonalitätsrelationen für trigonometrisches Funktionensystem:
Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\;dx &= 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\;dx &= \delta_{nk}\pi,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\;dx &= \delta_{nk}\pi.
\end{aligned}$$

Dabei ist das Kronecker-Symbol:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k,\\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Frage: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion. Lässt sich dann eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ finden?

Die Partialsummen (s_m) werden durch die trigonometrischen Polynome

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \ldots$$

definiert.

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)
Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n berechnen durch die Fourier-Analyse:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
*1768 Auxerre †1830 Paris

Fourier-Reihe

Definition: (Fourier-Reihe)
Nach der Herleitung der Fourier-Analyse lässt sich formal für jede integrierbare Funktion f die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

bilden. Sie heißt Fourier-Reihe.

Frage: Für welche f konvergiert die Fourier-Reihe gegen f?

Satz: (Konvergenz von Fourier-Reihen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe punktweise gegen f.

In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Definition: (Fourier-Reihe)
Nach der Herleitung der Fourier-Analyse lässt sich formal für jede integrierbare Funktion f die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

bilden. Sie heißt Fourier-Reihe.

Frage: Für welche f konvergiert die Fourier-Reihe gegen f?

Stückweise glatte Funktion

Definition: (stückweise glatte Funktion)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert. f heißt stückweise glatt falls:

1. f ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in I nirgends häufen.
2. In diesen Ausnahmepunkten x_i existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und Ableitungen:

$$f(x_i + 0) \quad \text{und} \quad f(x_i - 0),$$
$$f'(x_i + 0) \quad \text{und} \quad f'(x_i - 0).$$

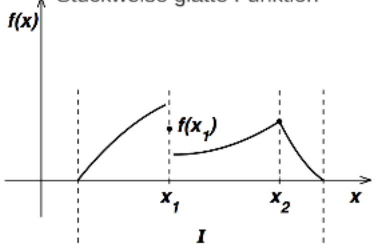
   Es existieren also die Grenzwerte

$$\begin{aligned} f'(x_i + 0) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i + 0)}{h}, \\ f'(x_i - 0) &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i - 0)}{h}. \end{aligned}$$

3. In allen Punkten x_i ist der Funktionswert $f(x_i)$ das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte (Vereinbarung)

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\left(f(x_i + 0) + f(x_i - 0)\right).$$

Stückweise glatte Funktion



Definition: (stückweise glatte Funktion)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definiert. f heißt stückweise glatt falls:

1. f ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in I nirgends häufen.

2. In diesen Ausnahmepunkten x_i existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und Ableitungen:

$$\begin{array}{ccc} f(x_i+0) & \text{und} & f(x_i-0), \\ f'(x_i+0) & \text{und} & f'(x_i-0). \end{array}$$

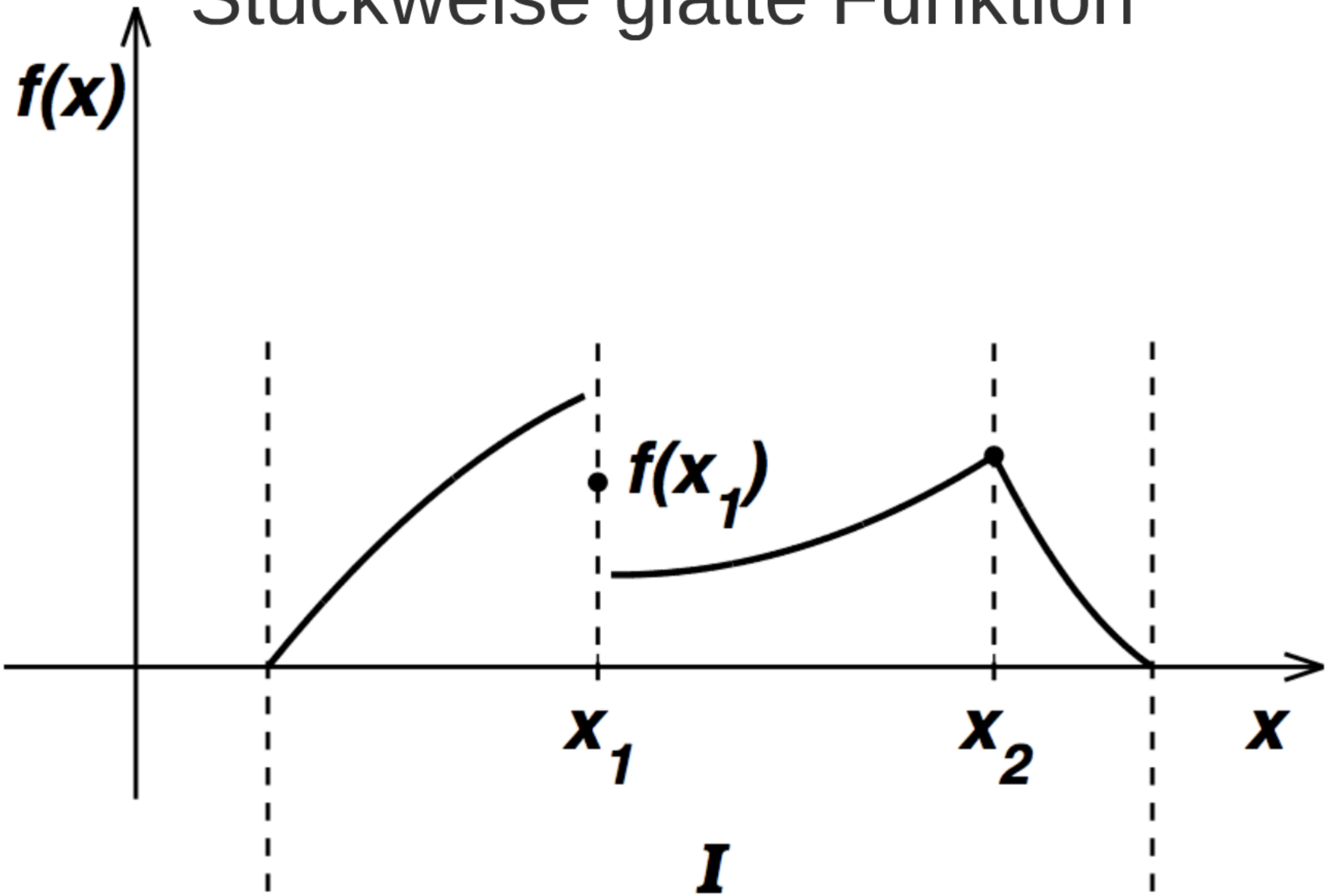
   Es existieren also die Grenzwerte

$$\begin{aligned} f'(x_i+0) &= \lim_{h\searrow 0} \frac{f(x_i+h)-f(x_i+0)}{h}, \\ f'(x_i-0) &= \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(x_i+h)-f(x_i-0)}{h}. \end{aligned}$$

3. In allen Punkten x_i ist der Funktionswert $f(x_i)$ das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte (Vereinbarung)

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\left(f(x_i+0)+f(x_i-0)\right).$$

Stückweise glatte Funktion



Satz: (Konvergenz von Fourier-Reihen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe punktweise gegen f.

In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Besselsche Ungleichung
Parsevalsche Gleichung

Satz: (Besselsche Ungleichung)
Für jede auf $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx.$$

Dabei sind a_k und b_k die Fourier-Koeffizienten von f.

Folgerung: (Parsevalsche Gleichung)
Mit Hilfe der Vollständigkeit des trigonometrischen Funktionensystems folgt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx.$$

Bemerkung: Aus der Parsevalschen Gleichung folgt insbesondere, dass die Fourier-Koeffizienten einer integrierbaren Funktion Nullfolgen sind:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Satz: (Punktwiese und gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe absolut gegen f.

Für die Fourier-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k|.$$

Satz: (Besselsche Ungleichung)
Für jede auf $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Dabei sind a_k und b_k die Fourier-Koeffizienten von f.

1

Folgerung: (Parsevalsche Gleichung)
Mit Hilfe der Vollständigkeit des trigonometrischen Funktionensystems folgt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Bemerkung: Aus der Parsevalschen Gleichung folgt insbesondere, dass die Fourier-Koeffizienten einer integrierbaren Funktion Nullfolgen sind:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Satz: (Punktwiese und gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe absolut gegen f.

Für die Fourier-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

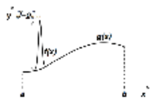
Konvergenz im quadratischen Mittel

Definition: (L_2-Norm)
Der Abstand zweier Funktionen f und g, die jeweils auf einem Intervall $I = [-\pi, \pi]$ definiert seien, kann mittels der L_2-Norm gemessen werden:

$$\|f - g\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Interpretation

- Konvergenz im quadratischen Mittel ist ausreichend, wenn "Ausreißer" unbedeutend sind.
- Es gilt $\|f - g\|_2 = 0$ insbesondere, wenn f und g nur an endlich vielen Stellen in I verschieden sind.
- Spielen "Ausreißer" eine wichtige Rolle, oder sind unbedingt zu vermeiden, so muss punktweise oder gleichmäßige Konvergenz betrachtet werden.



Satz: (Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise stetige Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen f.

Für die Partialsummen s_m der Fourier-Reihe von f gilt:

$$\lim_{m \to \infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

Bemerkung: Der Satz erlaubt keine quantitative Aussage über den Fehler im Sinne

$$e(x) = f(x) - s_m(x)$$

an einer Stelle x im Intervall I, sondern lediglich eine integrale Abschätzung!
Dies ist ein Unterschied zur Taylor-Reihe, wo das Restglied eine explizite Fehlerschätzung für jedes x erlaubt.

Satz: (Bestapproximation im quadratischen Mittel)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, und $s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ ein trigonometrisches Polynom für beliebiges vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist der quadratische Fehler der Approximation von f durch s_m in der L_2-Norm, gegeben als

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 \, dx,$$

genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0, a_k und b_k $(k = 1, \ldots, m)$ gerade die Fourier-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt dann:

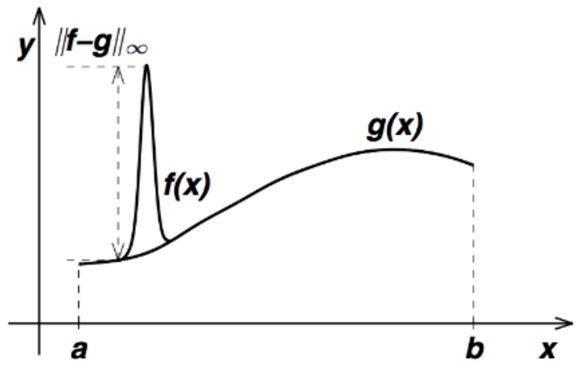
$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Definition: (L_2-Norm)
Der Abstand zweier Funktionen f und g, die jeweils auf einem Intervall $I = [-\pi, \pi]$ definiert seien, kann mittels der L_2-Norm gemessen werden:

$$\|f - g\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Interpretation:

- Konvergenz im quadratischen Mittel ist ausreichend, wenn "Ausreißer" unbedeutend sind.
- Es gilt $\|f - g\|_2 = 0$ insbesondere, wenn f und g nur an endlich vielen Stellen in I verschieden sind.
- Spielen "Ausreißer" eine wichtige Rolle, oder sind unbedingt zu vermeiden, so muss punktweise oder gleichmäßige Konvergenz betrachtet werden.



Satz: (Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise stetige Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen f.

Für die Partialsummen s_m der Fourier-Reihe von f gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

Satz: (Bestapproximation im quadratischen Mittel)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, und $s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ ein trigonometrisches Polynom für beliebiges vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist der quadratische Fehler der Approximation von f durch s_m in der L_2-Norm, gegeben als

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 \, dx,$$

genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0, a_k und b_k $(k = 1, \ldots, m)$ gerade die Fourier-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt dann:

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Bemerkung: Der Satz erlaubt keine quantitative Aussage über den Fehler im Sinne

$$e(x) = f(x) - s_m(x)$$

an einer Stelle x im Intervall I, sondern lediglich eine integrale Abschätzung!
Dies ist ein Unterschied zur Taylor-Reihe, wo das Restglied eine explizite Fehlerschätzung für jedes x erlaubt.

Spezielle Anwendungen

Bemerkunge: (Fourier-Reihen von geraden/ungeraden Funktionen)
Für die Fourier-Koeffizienten einer geraden Funktion gilt ($k = 1, 2, 3, \ldots$):

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad \text{und} \quad b_k = 0.$$

Entsprechend gilt für die Fourier-Koeffizienten einer ungeraden Funktion:

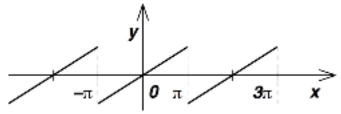
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \quad \text{und} \quad a_k = 0.$$

2

Beispiel: (Sägezahn-Funktion)
Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für} \quad -\pi < x < \pi,\ a > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = \pi. \end{cases}$$

Die Funktion sei zu einer 2π-periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.



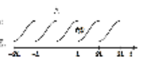
3

Bemerkung: (Fortsetzung zu periodischen Funktionen)

Gegeben sei $f : [0, L[\to \mathbb{R}$.
Ziel ist es, f durch trigonometrische Reihe darzustellen.
Dazu müssen wir eine L-periodische Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden, so dass $F(t) = f(t)$ auf $[0, L[$.

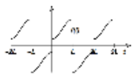
- Direkte Fortsetzung auf $[0, L[$ zu einer L-periodischen Funktion:

$$F(t) = f(t - kL) \quad \text{für} \quad kL \le t < (k+1)L,\ k \in \mathbb{Z}.$$



- Ungerade Fortsetzung zu einer $2L$-periodischen Funktion:

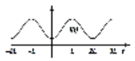
$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad 0 \le t < L, \\ f(0) & \text{für} \quad t = L, \\ -f(-t) & \text{für} \quad -L < t < 0. \end{cases}$$



Definiere nun $F(t + 2kL) = F(t)$ für $-L < t \le L$.

- Gerade Fortsetzung zu einer $2L$-periodischen Funktion:

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad 0 \le t < L, \\ f(0) & \text{für} \quad t = L, \\ f(-t) & \text{für} \quad -L < t < 0. \end{cases}$$



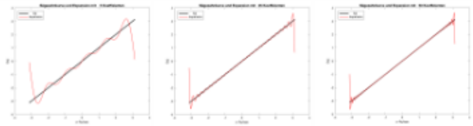
Definiere wieder $F(t + 2kL) = F(t)$ für $-L < t \le L$.

Beispiel: (Sägezahn-Funktion)
Darstellung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für} \quad -\pi < x < \pi,\ a > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = \pi. \end{cases}$$

mit $a = 1$ und $-\pi < x < \pi$ mittels der ersten m Koeffizienten der Fourier-Reihe:

$$x = 2\left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{\sin(mx)}{m}\right)$$



Bemerkunge: (Fourier-Reihen von geraden/ungeraden Funktionen)
Für die Fourier-Koeffizienten einer geraden Funktion gilt ($k = 1, 2, 3, \ldots$):

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx \quad \text{und} \quad b_k = 0.$$

Entsprechend gilt für die Fourier-Koeffizienten einer ungeraden Funktion:

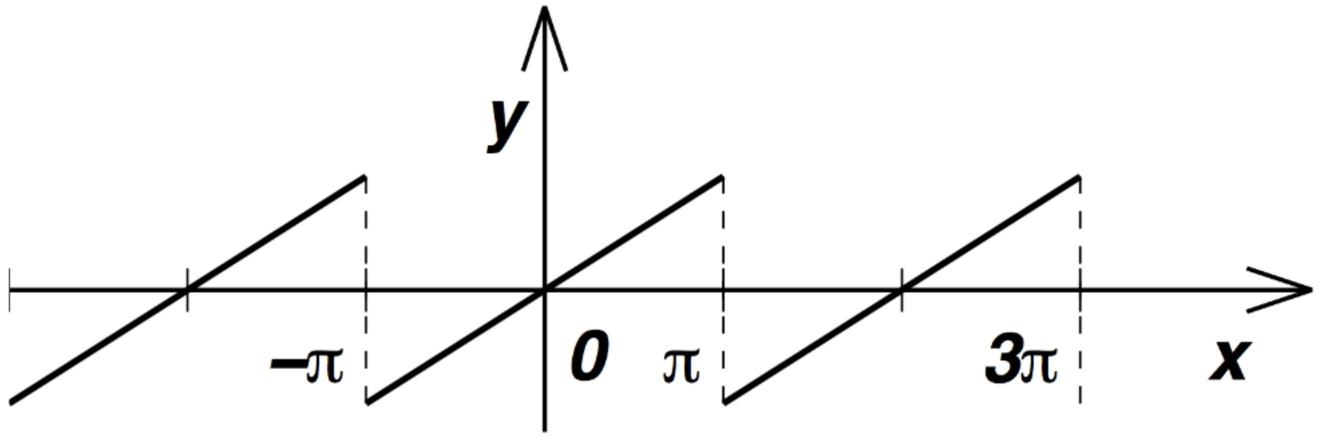
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx \quad \text{und} \quad a_k = 0.$$

2

Beispiel: (Sägezahn-Funktion)
Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für} \quad -\pi < x < \pi, \ a > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = \pi. \end{cases}$$

Die Funktion sei zu einer 2π-periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.



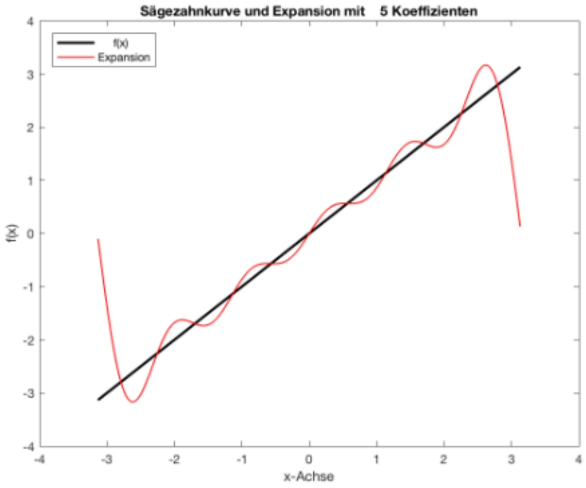
3

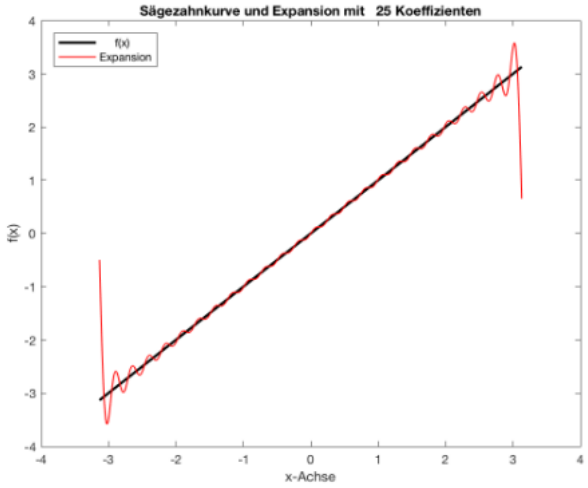
Beispiel: (Sägezahn-Funktion)
Darstellung der Funktion

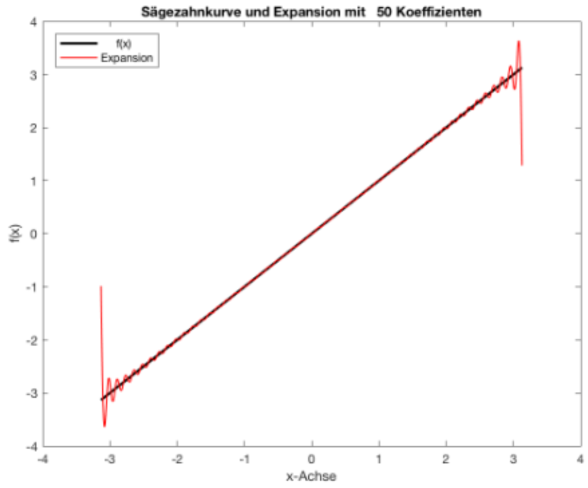
$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für} \quad -\pi < x < \pi, \; a > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = \pi. \end{cases}$$

mit $a = 1$ und $-\pi < x < \pi$ mittels der ersten m Koeffizienten der Fourier-Reihe:

$$x = 2\left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{\sin(mx)}{m}\right)$$





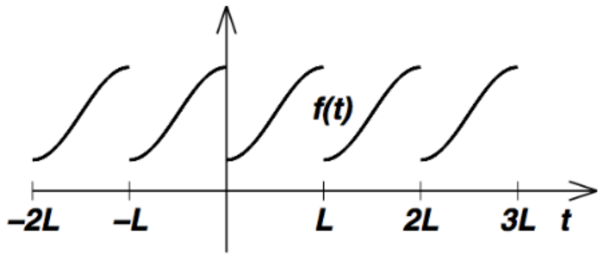


Bemerkung: (Fortsetzung zu periodischen Funktionen)

Gegeben sei $f : [0, L[\to \mathbb{R}$.
Ziel ist es, f durch trigonometrische Reihe darzustellen.
Dazu müssen wir eine L-periodische Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden, so dass $F(t) = f(t)$ auf $[0, L[$.

- Direkte Fortsetzung auf $[0, L[$ zu einer L-periodischen Funktion:

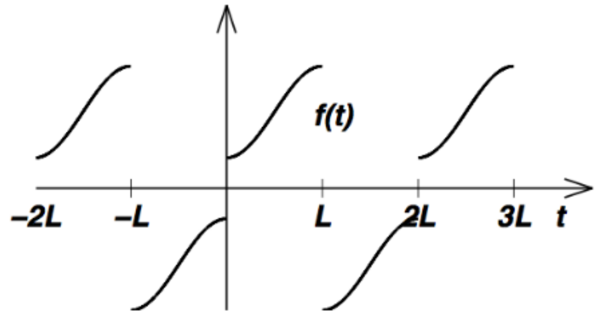
$$F(t) = f(t - kL) \quad \text{für} \quad kL \le t < (k+1)L,\ k \in \mathbb{Z}.$$



- Ungerade Fortsetzung zu einer $2L$-periodischen Funktion:

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad 0 \le t < L, \\ f(0) & \text{für} \quad t = L, \\ -f(-t) & \text{für} \quad -L < t < 0. \end{cases}$$

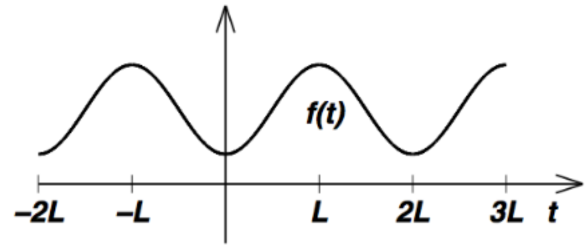
Definiere nun $F(t + 2kL) = F(t)$ für $-L < t \le L$.



- Gerade Fortsetzung zu einer $2L$-periodischen Funktion:

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad 0 \le t < L, \\ f(0) & \text{für} \quad t = L, \\ f(-t) & \text{für} \quad -L < t < 0. \end{cases}$$

Definiere wieder $F(t + 2kL) = F(t)$ für $-L < t \le L$.



Gliedweise Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit

Satz: (Integration einer Fourier-Reihe)

Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe kann gliedweise integriert werden und es gilt

$$F(x) = \int_0^\pi f(\xi)\, d\xi - \frac{a_0}{2}x = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin(kx) - \frac{b_k}{k}\cos(kx)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.$$

Dabei konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $F(x)$.

Satz: (Differentiation einer Fourier-Reihe)

Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kann nur dann gliedweise an einer Stelle x differenziert werden, wenn die Ableitungsreihe in x konvergent ist.
Im Fall der Konvergenz konvergiert die Ableitungsreihe gegen $f'(x)$ in x.
Hinreichend für die Konvergenz ist die

1. Stetigkeit und die
2. stückweise stetige Differenzierbarkeit

von f'.

Satz: (Integration einer Fourier-Reihe)

Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe kann gliedweise integriert werden und es gilt

$$F(x) = \int_0^{\pi} f(\xi)\, d\xi - \frac{a_0}{2}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Dabei konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $F(x)$.

Satz: (Differentiation einer Fourier-Reihe)

Eine punktweise konvergente Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kann nur dann gliedweise an einer Stelle x differenziert werden, wenn die Ableitungsreihe in x konvergent ist.
Im Fall der Konvergenz konvergiert die Ableitungsreihe gegen $f'(x)$ in x.
Hinreichend für die Konvergenz ist die

1. Stetigkeit und die

2. stückweise stetige Differenzierbarkeit

von f'.

Komplexe Schreibweise

Bemerkung: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

Bemerkung: Die Koeffizienten α_n der kompakten Form einer Fourier-Reihe lassen sich wieder durch Integration berechnen:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Außerdem gelten die Beziehungen zu den reellen Koeffizienten $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n + \alpha_{-n}, \\ b_n &= i(\alpha_n - \alpha_{-n}). \end{aligned}$$

Beispiel: Schwingungen können unmittelbar mit dem Reihenansatz

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t},$$

$\omega > 0$ Kreisfrequenz der Schwingung, dargestellt werden. Eine Phasenverschiebung einer solchen Schwingung $g(t) = f(t - t_0)$ kann mit Hilfe des Additionstheorems der Exponentialfunktion dann einfach geschrieben werden:

$$g(t) = f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega(t - t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(\alpha_n e^{-in\omega t_0})}_{=:\beta_n} e^{in\omega t}.$$

Bemerkung: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

4

Bemerkung: Die Koeffizienten α_n der kompakten Form einer Fourier-Reihe lassen sich wieder durch Integration berechnen:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

Außerdem gelten die Beziehungen zu den reellen Koeffizienten $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

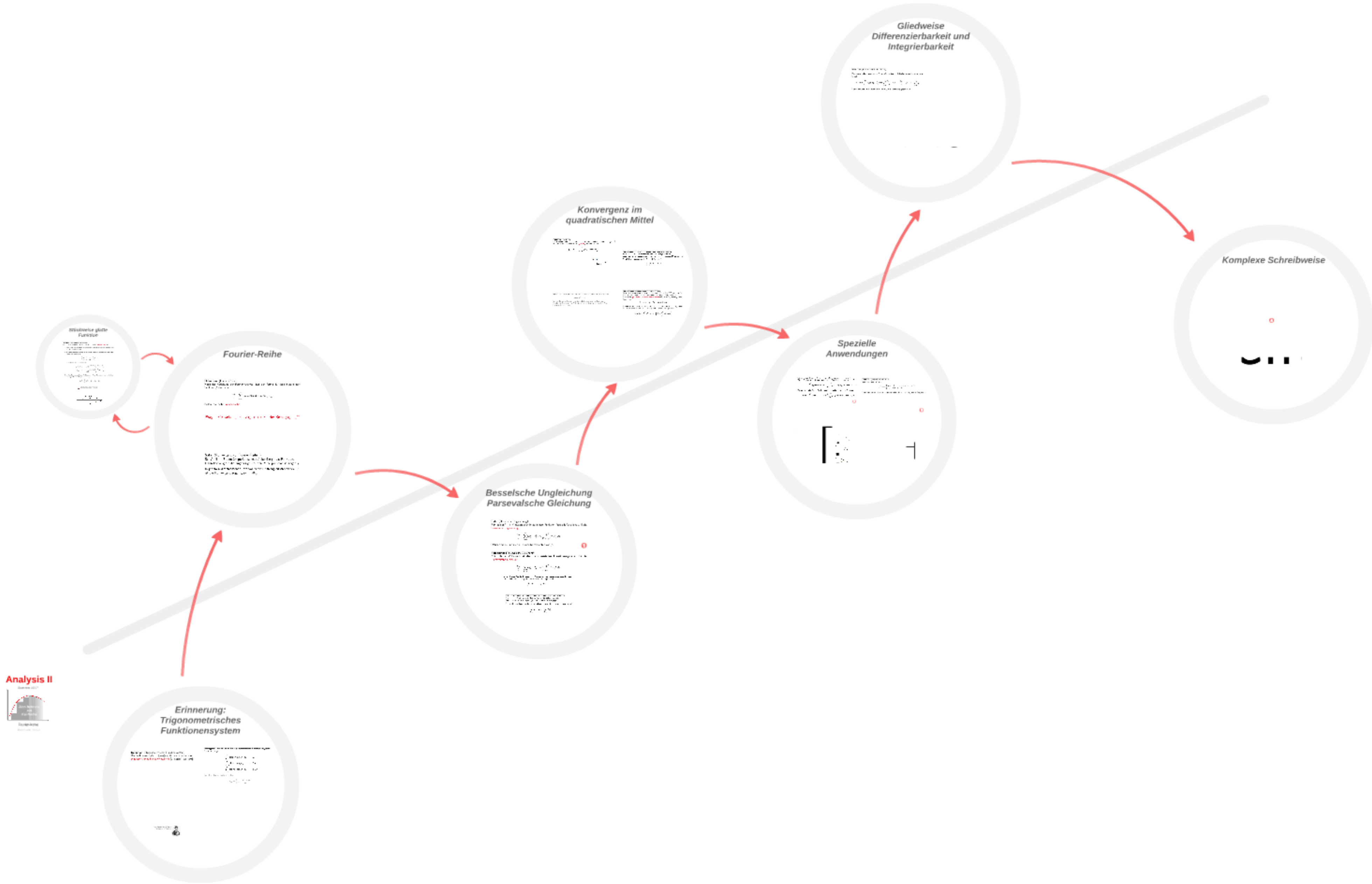
$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n + \alpha_{-n}, \\ b_n &= i(\alpha_n - \alpha_{-n}). \end{aligned}$$

Beispiel: Schwingungen können unmittelbar mit dem Reihenansatz

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t},$$

$\omega > 0$ Kreisfrequenz der Schwingung, dargestellt werden. Eine Phasenverschiebung einer solchen Schwingung $g(t) = f(t - t_0)$ kann mit Hilfe des Additionstheorems der Exponentialfunktion dann einfach geschrieben werden:

$$g(t) = f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\alpha_n e^{-in\omega t_0}\right)}_{=:\beta_n} e^{in\omega t}.$$


Analysis II
Erinnerung: Trigonometrisches Funktionensystem
Fourier-Reihe
Besselsche Ungleichung Parsevalsche Gleichung
Konvergenz im quadratischen Mittel
Spezielle Anwendungen
Gliedweise Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit
Komplexe Schreibweise