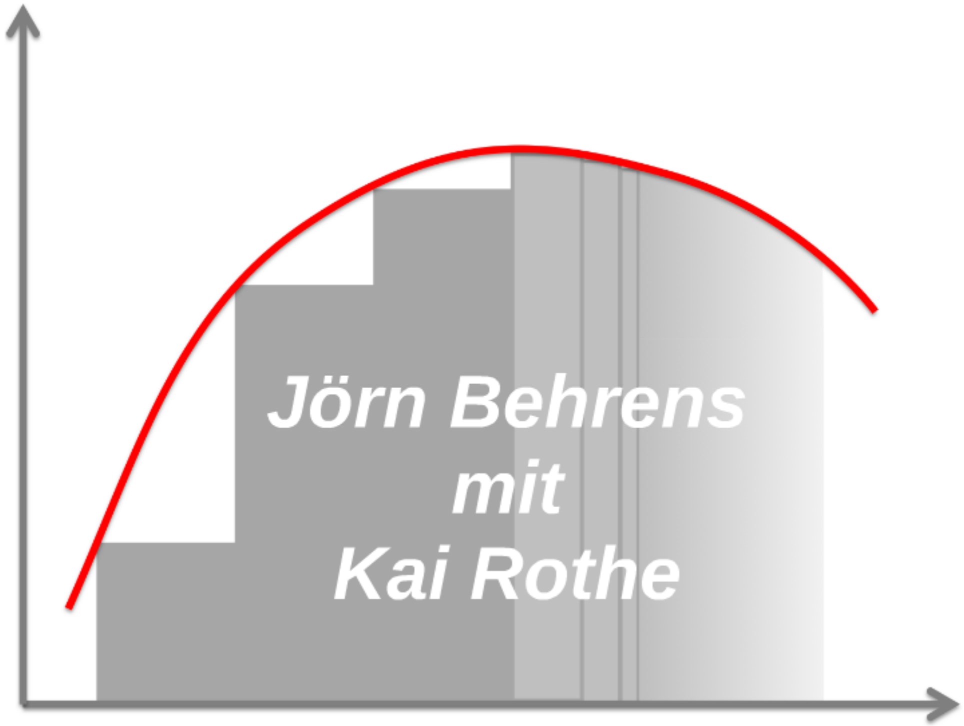
Analysis II

Sommer 2017



Logarithmus, Sinus, Cosinus

Buch Kapitel 3.6

Erinnerung
Exponentialfunktion

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

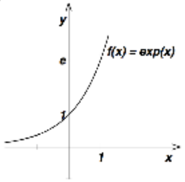
Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion:
Mit Hilfe des Additionstheorems findet man:

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1.$
- Es ist $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Dann folgt aus dem Additionstheorem:

$$\exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$



- Also ist $\exp(x)$ streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
- Es gilt auch: $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.
- Aus der Monotonie folgt: $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist injektiv.
- Aus Konvergenz der Potenzreihe folgt Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Aus

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$$

  folgt mit dem Zwischenwertsatz auch die Surjektivität.
- Insgesamt ist $\exp$ also bijektiv.

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

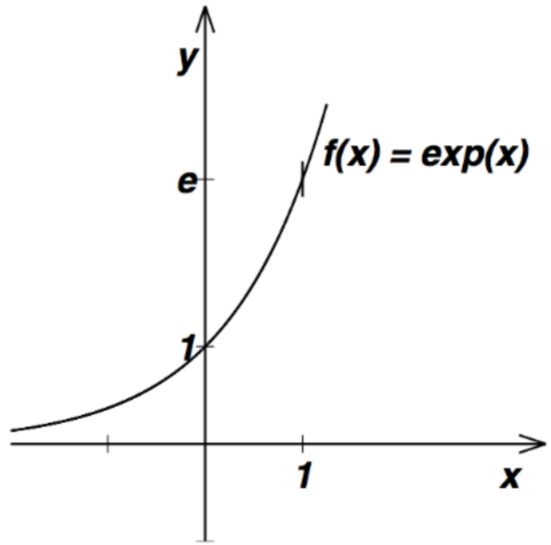
Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion:
Mit Hilfe des Additionstheorems findet man:

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1.$
- Es ist $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Dann folgt aus dem Additionstheorem:

$$\exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$



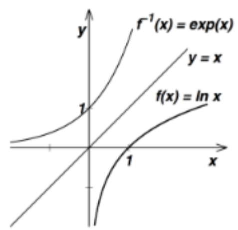
- Also ist $\exp(x)$ streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
- Es gilt auch: $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.
- Aus der Monotonie folgt: $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist injektiv.
- Aus Konvergenz der Potenzreihe folgt Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Aus

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$$

  folgt mit dem Zwischenwertsatz auch die Surjektivität.
- Insgesamt ist $\exp$ also bijektiv.

Logarithmusfunktion

Definition: (Natürlicher Logarithmus)
Die inverse Funktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ existiert (wg. Bijektivität) und wird mit $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ bezeichnet.
Die Funktion heißt natürlicher Logarithmus.



Ableitung der Exponentialfunktion
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert gleichmäßig, also ist gliedweises Differenzieren möglich:

$$(\exp(x))' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl
Es gilt

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \approx 2,71828\ldots$$

die die Eulersche Zahl.

Also

$$e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x\ln(\exp(1))) = \exp(x).$$

Beobachtung: Es gilt nach Definition

$$\exp(\ln(x)) = x.$$

Daher gilt wegen des Additionstheorems für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp(\ln(ab)) = ab = \exp(\ln(a))\exp(\ln(b)) = \exp(\ln(a) + \ln(b)).$$

Wegen der Bijektivität von exp gilt dann also das **Logarithmusgesetz**:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Bemerkung: Analog kann man zeigen:

$$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c).$$

Und damit (setze $b = c$):

$$\ln(1) = 0.$$

Definition: (Allgemeine Potenzfunktion, Logarithmus zur Basis a)
Sei $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion

$$f(x) = a^x = \exp(x\ln(a))$$

Potenzfunktion zur Basis a.

Die entsprechend existierende Umkehrfunktion $g(x)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a:

$$g(x) = \log_a x.$$

Eigenschaften: Man zeigt leicht die folgenden Eigenschaften:

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$

Eigenschaften für natürliche Exponenten
Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich aus $a^{x+y} = a^x a^y$ mittels vollständiger Induktion

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

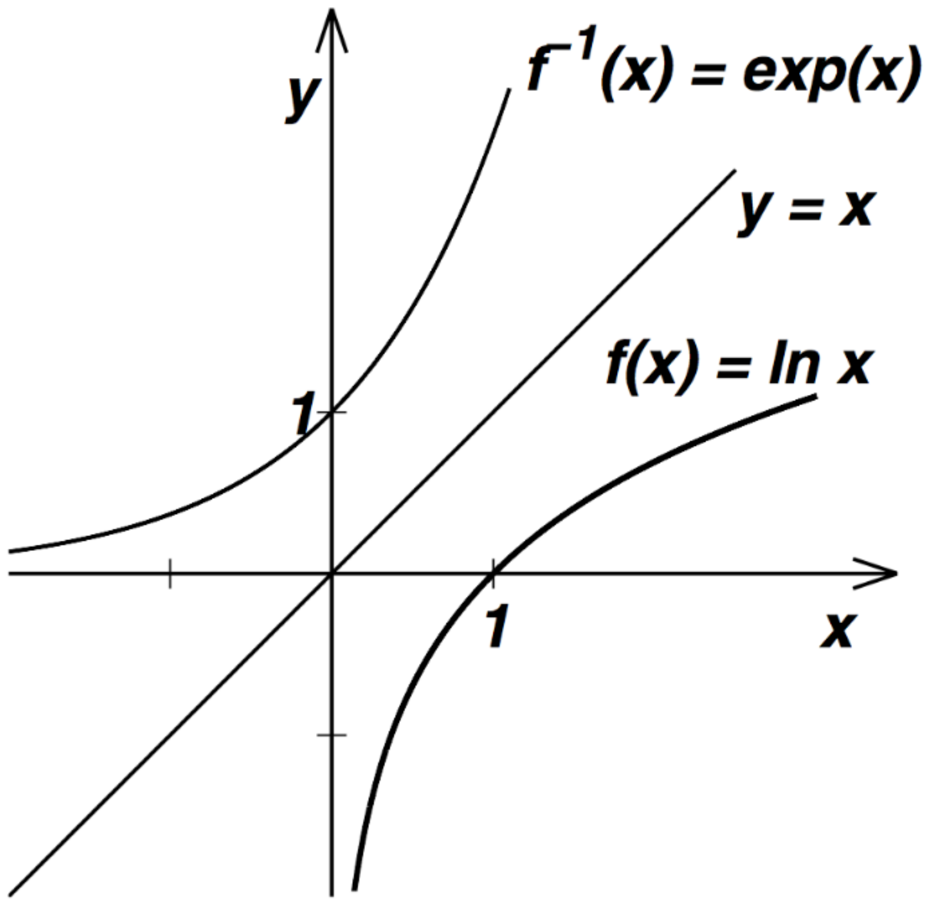
Die Definition passt zu früherer Definition mit ganzzahligen Exponenten.

n-te Wurzel: Man zeigt mit der Definition:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = \exp(n\ln(a^{\frac{1}{n}})) = \exp(n\ln(\exp(\frac{1}{n}\ln(a)))) = \exp(\ln(a)) = a$$

also ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Definition: (Natürlicher Logarithmus)
Die inverse Funktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ existiert (wg. Bijektivität) und wird mit $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ bezeichnet.
Die Funktion heißt natürlicher Logarithmus.



Beobachtung: Es gilt nach Definition

$$\exp(\ln(x)) = x.$$

Daher gilt wegen des Additionstheorems für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp(\ln(ab)) = ab = \exp(\ln(a))\exp(\ln(b)) = \exp(\ln(a) + \ln(b)).$$

Wegen der Bijektivität von $\exp$ gilt dann also das **Logarithmusgesetz**:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Bemerkung: Analog kann man zeigen:

$$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c).$$

Und damit (setze $b = c$):

$$\ln(1) = 0.$$

Definition: (Allgemeine Potenzfunktion, Logarithmus zur Basis a)
Sei $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion

$$f(x) = a^x = \exp(x \ln(a))$$

Potenzfunktion zur Basis a.

Die entsprechend existierende Umkehrfunktion $g(x)$ heißt
Logarithmusfunktion zur Basis a:

$$g(x) = \log_a x.$$

Eigenschaften: Man zeigt leicht die folgenden Eigenschaften:

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$

Eigenschaften für natürliche Exponenten:
Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich aus $a^{x+y} = a^x a^y$ mittels vollständiger Induktion

$$a^n = \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n}$$

Die Definition passt zu früherer Definition mit ganzzahligen Exponenten.

n-**te Wurzel**: Man zeigt mit der Definition:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = \exp(n \ln(a^{\frac{1}{n}}) = \exp(n \ln(\exp(\frac{1}{n} \ln(a))) = \exp(\ln(a)) = a$$

also ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl

Es gilt

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \approx 2,71828\ldots$$

die die Eulersche Zahl.

Also

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x \ln(\exp(1))) = \exp(x).$$

Ableitung der Exponentialfunktion

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert gleichmäßig, also ist gliedweises Differenzieren möglich:

$$(\exp(x))' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

Sinus/Cosiuns

Motivation: Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

zur Berechnung von Wurzeln bzw. Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$ und zur Konvertierung in Polarkoordinaten.

Komplexe Exponentialfunktion: Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

die komplexe Exponentialfunktion. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion: Es gilt für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$
- $\exp(z) \neq 0$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- $a^z = \exp(z\ln(a))$ für $0 < a \in \mathbb{R}$
- $e^z = \exp(z)$

Definition: (Sinus und Cosinus)
Auf ganz $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots
\end{aligned}$$

Die so erklärten Funktionen heißen Sinus- und Cosinus Funktion.

2

Eigenschaften: (Sinus und Cosinus)
Aus den Reihendefinitionen für die Cosinus- und Sinusfunktion, sowie dem Additionstheorem für exp ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (Eulersche Formel) und $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$
- $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade Fkt.) und $\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade Fkt.)
- $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x \sin y$ (Additionsformel für cos)
- $\sin(x \pm y) = \cos x \sin y \pm \sin x \cos y$ (Additionsformel für sin)
- $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$
- $\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 -1$ und $\sin 2x = 2\cos x \sin x$

Bemerkung (Ableitungen)
Wie bei der Exponentialfunktion können auch hier die Ableitungen gliedweise berechnet werden. Es ergibt sich

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{und} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Durch Induktion lässt sich weiter beweisen:

$$\begin{aligned}
(\sin x)^{(2k)} &= (-1)^k \sin x & (\sin x)^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x \\
(\cos x)^{(2k)} &= (-1)^k \cos x & (\cos x)^{(2k+1)} &= (-1)^{k+1} \sin x
\end{aligned}$$

Bemerkung (Taylorreihe für die Sinusfunktion)
Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{2k-2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2k-2}(x) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots + R_{2k+2}(x)
\end{aligned}$$

wobei $R_{2k+2}(x) = \frac{\sin^{(2k+3)}(\xi)}{(2k+3)!} x^{2k+3}$ mit $\xi \in [0, x]$.
Analoges gilt für cos.

Spezielle Funktionswerte von cos und sin
Aus

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1$$

folgt (analog für sin):

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Weitere spezielle Werte kann man berechnen:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Periodizität von cos und sin 3

Definition (Zahl π)
Die Zahl π ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

Satz (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)
Die Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sind periodisch und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$ 4

Motivation: Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

zur Berechnung von Wurzeln bzw. Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$ und zur Konvertierung in Polarkoordinaten.

Komplexe Exponentialfunktion: Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

die komplexe Exponentialfunktion. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion: Es gilt für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$
- $\exp(z) \neq 0$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- $a^z = \exp(z \ln(a))$ für $0 < a \in \mathbb{R}$
- $e^z = \exp(z)$

Definition: (Sinus und Cosinus)
Auf ganz $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\end{aligned}$$

Die so erklärten Funktionen heißen Sinus- und Cosinus Funktion.

2

Eigenschaften: (Sinus und Cosinus)
Aus den Reihendefinitionen für die Cosinus- und Sinusfunktion, sowie dem Additionstheorem für $\exp$ ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Eulersche Formel) und $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
- $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade Fkt.) und $\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade Fkt.)
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ (Additionsformel für $\cos$)
- $\sin /x \pm y) = \cos x \sin y \pm \sin x \sin y$ (Additionsformel für $\sin$)
- $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$
- $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 -1$ und $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

Periodizität von $\cos$ und $\sin$ 3

Definition (Zahl π)
Die Zahl π ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

Satz (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)
Die Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sind periodisch und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$ 4

Spezielle Funktionswerte von $\cos$ und $\sin$

Aus

$$0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(2\frac{\pi}{4}) = 2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1$$

folgt (analog für $\sin$):

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Weitere spezielle Werte kann man berechnen:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Bemerkung (Ableitungen)
Wie bei der Exponentialfunktion können auch hier die Ableitungen gliedweise berechnet werden. Es ergibt sich

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{und} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Durch Induktion lässt sich weiter beweisen:

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(2k)} &= (-1)^k \sin x \qquad & (\sin x)^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x \\ (\cos x)^{(2k)} &= (-1)^k \cos x \qquad & (\cos x)^{(2k+1)} &= (-1)^{k+1} \sin x \end{aligned}$$

Bemerkung (Taylorreihe für die Sinusfunktion)
Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{2k+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2k+2}(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots + R_{2k+2}(x)\end{aligned}$$

wobei $R_{2k+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ mit $\xi \in [0, x]$.
Analoges gilt für $\cos$.

Erinnerung Exponentialfunktion

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

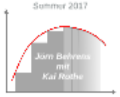
Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

Logarithmusfunktion

Analysis II

Sommer 2017



Logarithmus, Sinus, Cosinus

Sinus/Cosiuns