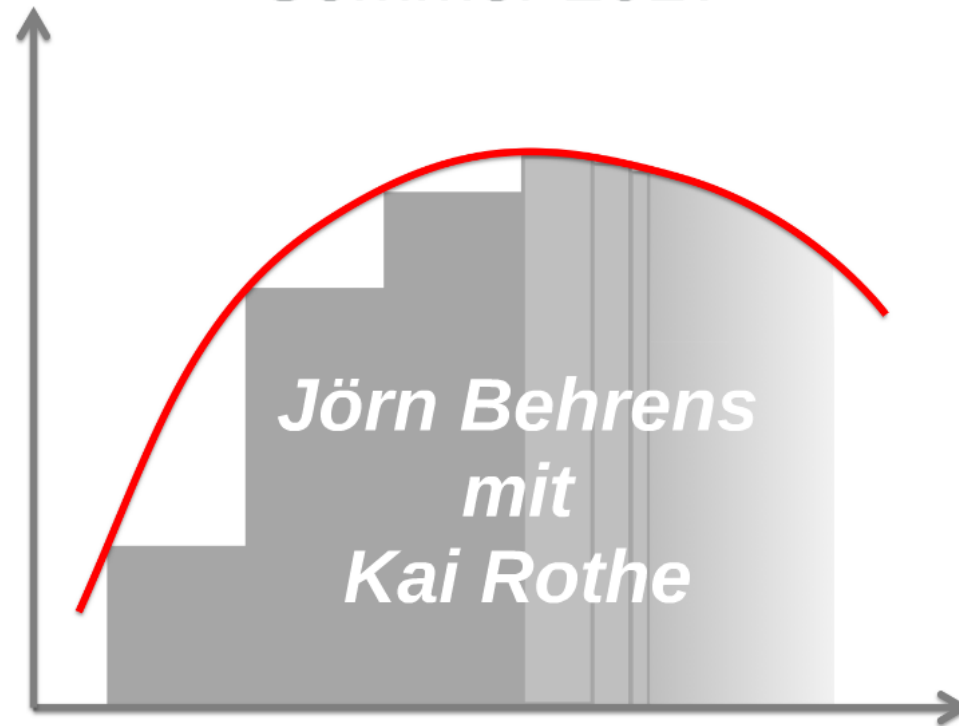


# Analysis II

Sommer 2017



Funktionenfolgen und -reihen

Buch Kapitel 3.2 und 3.3

# Funktionenfolge

**Definition:** (Funktionenfolge)  
Die unendliche Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

der Funktionen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  heißt **Funktionenfolge** auf  $D$ .  
Schreibe kurz  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(f_n)$ .

**Definition:** (punktweise Konvergenz)

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  auf  $D$  heißt **punktweise konvergent**,  
wenn für jedes  $x \in D$  die Zahlenfolge  $(f_n(x))$  konvergiert.

Wir sagen abkürzend einfach *konvergent*.

Die Grenzfunktion  $f$  ist für jedes  $x \in D$  gegeben durch:

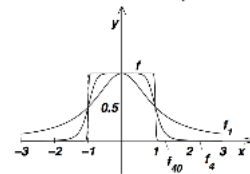
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

**Beispiel:** Sei die Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $D = ]-\infty, \infty[$  gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dann strebt  $f_n(x)$  punktweise gegen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$



**Definition:** (Funktionsfolge)

Die unendliche Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

der Funktionen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  heißt **Funktionsfolge** auf  $D$ .  
Schreibe kurz  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(f_n)$ .

**Definition:** (punktweise Konvergenz)

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  auf  $D$  heißt **punktweise konvergent**, wenn für jedes  $x \in D$  die Zahlenfolge  $(f_n(x))$  konvergiert.

Wir sagen abkürzend einfach *konvergent*.

Die Grenzfunktion  $f$  ist für jedes  $x \in D$  gegeben durch:

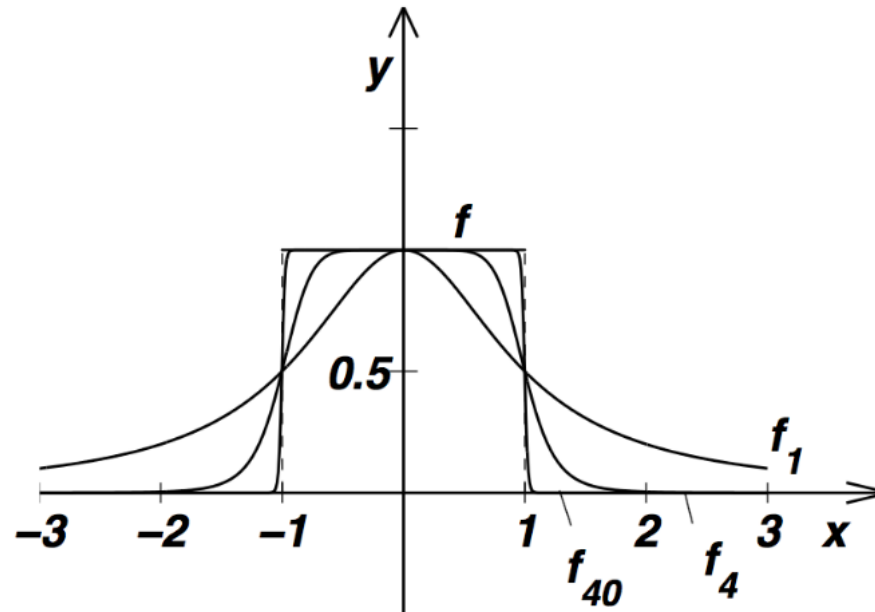
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

**Beispiel:** Sei die Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $D = ] - \infty, \infty[$  gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dann strebt  $f_n(x)$  punktweise gegen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$



# Abstand von Funktionen

## Definition: (Abstand)

Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktionen, so heißt

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

Abstand der Funktionen voneinander.

## Definition: (Supremumsnorm)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion, so ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

die Supremumsnorm der Funktion  $f$ .

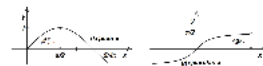
## Bemerkungen:

- Die Supremumsnorm ist gerade der Abstand von  $f$  zur Funktion  $g = 0$ .
- Sind  $f, g$  stetig und ist  $D$  kompakt, so gilt:

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in D} |f(x) - g(x)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in D} |f(x)|.$$

- Dann existiert  $x_0 \in D$  bzw.  $x_1 \in D$  mit

$$\|f - g\|_\infty = |f(x_0) - g(x_0)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty = |f(x_1)|.$$



$$f : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} |f(x)| = \frac{1}{2} (x^2 + 1).$$

## **Definition:** (Abstand)

Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktionen, so heißt

$$\|f - g\|_{\infty} := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

**Abstand** der Funktionen voneinander.

**Definition:** (Supremumsnorm)

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion, so ist

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

die **Supremumsnorm** der Funktion  $f$ .



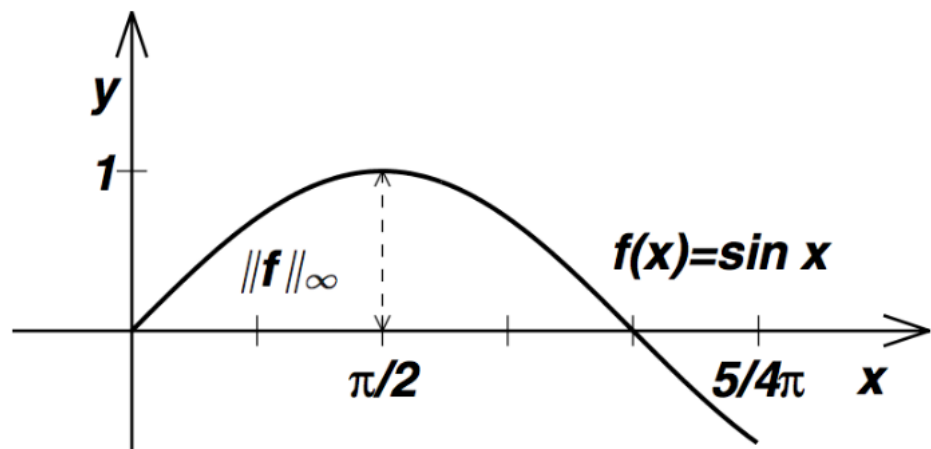
## Bemerkungen:

- Die Supremumsnorm ist gerade der Abstand von  $f$  zur Funktion  $g \equiv 0$ .
- Sind  $f, g$  stetig und ist  $D$  kompakt, so gilt:

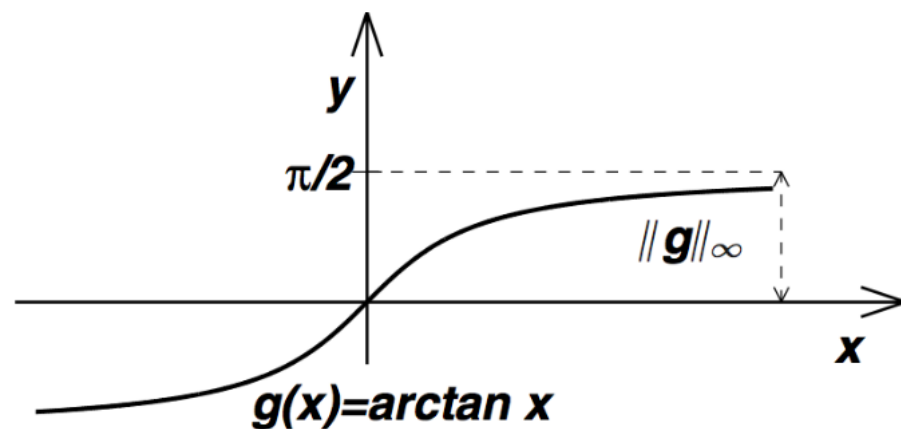
$$\|f - g\|_{\infty} = \max_{x \in D} |f(x) - g(x)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{\infty} = \max_{x \in D} |f(x)|.$$

- Dann existiert  $x_0 \in D$  bzw.  $x_1 \in D$  mit

$$\|f - g\|_{\infty} = |f(x_0) - g(x_0)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{\infty} = |f(x_1)|.$$



$$f : [0, \frac{5}{4}\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x.$$



$$g : \mathbb{R} \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g(x) = \arctan x.$$

# Gleichmäßige Konvergenz

## Definition: (Gleichmäßige Konvergenz)

Sei  $(f_n)$  mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionenfolge, dann konvergiert  $f_n$  **gleichmäßig** gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $f_n - f$  auf  $D$  beschränkt sind und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0.$$

Schreibe auch:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{oder} \quad f_n \rightarrow f \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

1

## Satz: (Cauchy-Kriterium f. gleichmäßige Konvergenz)

Sei  $(f_n)$  Funktionenfolge mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.  $f_n$  konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn gilt:

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es  $n_0$ , so dass für alle  $n, m \geq n_0$  gilt

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} < \epsilon.$$

**Definition:** (Gleichmäßige Konvergenz)

Sei  $(f_n)$  mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionenfolge, dann konvergiert  $f_n$  **gleichmäßig** gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $f_n - f$  auf  $D$  beschränkt sind und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0.$$

Schreibe auch:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{oder} \quad f_n \rightarrow f \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

1

**Satz:** (Cauchy-Kriterium f. gleichmäßige Konvergenz)

Sei  $(f_n)$  Funktionenfolge mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.  $f_n$  konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn gilt:

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es  $n_0$ , so dass für alle  $n, m \geq n_0$  gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

# Stetige Grenzfunktion

**Satz:** (Stetige Grenzfunktion)

Jede auf  $D$  gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen  $(f_n)$  hat auf  $D$  eine stetige Grenzfunktion.

**Bemerkung:** Der Satz kann auch anders formuliert werden:

Sei  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in D$  und  $(f_n)$  gleichmäßig konvergent, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_k)].$$

2

**Satz:** (Stetige Grenzfunktion)

Jede auf  $D$  gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen  $(f_n)$  hat auf  $D$  eine stetige Grenzfunktion.

**Bemerkung:** Der Satz kann auch anders formuliert werden:

Sei  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in D$  und  $(f_n)$  gleichmäßig konvergent, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_k)].$$



# Gliedweise Integration und Differentiation

## Satz: (Gliedweise Differentiation)

Die Folge  $(f_n)$  und ihre Ableitungen  $(f'_n)$  seien auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent und es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ .

Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'.$$

**Bemerkung:** Es reicht sogar die Voraussetzung:  
Sei  $(f'_n)$  für ein  $x \in ]a, b[$  konvergent.

## Satz: (Gliedweise Integration)

Die Folge  $(f_n)$  sei auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent und die  $f_n$  seien integrierbar. Dann ist die Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

## Bemerkungen:

- Im Satz über die gliedweise Differentiation muss vorausgesetzt werden, dass die Folge der Ableitungen  $(f'_n)$  gleichmäßig konvergiert.
- Im Ergebnis der Differentiation der Folge  $(f_n)$  entsteht wieder eine Funktionenfolge  $(f'_n)$ .
- Im Ergebnis der Integration der Folge  $(f_n)$  entsteht eine Zahlenfolge  $(\int_a^b f_n(x) dx)$ .



**Satz:** (Gliedweise Differentiation)

Die Folge  $(f_n)$  und ihre Ableitungen  $(f'_n)$  seien auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent und es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ .

Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'.$$

**Bemerkung:** Es reicht sogar die Voraussetzung:

Sei  $(f_n)$  für ein  $x \in [a, b]$  konvergent.

**Satz:** (Gliedweise Integration)

Die Folge  $(f_n)$  sei auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent und die  $f_n$  seien integrierbar. Dann ist die Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

## Bemerkungen:

- Im Satz über die gliedweise Differentiation muss vorausgesetzt werden, dass die Folge der Ableitungen  $(f'_n)$  gleichmäßig konvergiert.
- Im Ergebnis der Differentiation der Folge  $(f_n)$  entsteht wieder eine Funktionenfolge  $(f'_n)$ .
- Im Ergebnis der Integration der Folge  $(f_n)$  entsteht eine Zahlenfolge  $(\int_a^b f_n(x) dx)$ .

# Funktionenreihe

## Definition: (Funktionenreihe)

Sei  $\{f_k\}$  eine Funktionenfolge auf  $D$ . Definiere eine neue Funktionenfolge  $\{s_n\}$  durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{s_n\}$  heißt **unendliche Reihe** oder **Reihe der Funktionen**  $\{f_k\}$ .  
 $f_k$  heißen **Glieder der Reihe** und  $s_n$  **Teil- oder Partialsummen**.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

## Definition: (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  heißt **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent**, wenn die Folge  $\{s_n\}$  der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

Die Grenzfunktion  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  heißt **Summe der Reihe** (oder Summenfunktion).  
Schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

## Definition: (Gleichmäßig absolut konvergent)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von auf  $D$  beschränkten Funktionen heißt **gleichmäßig absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$  konvergiert.

**Bemerkung:** Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig absolut konvergent, so folgt auch die gleichmäßige Konvergenz, denn es gilt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}.$$

wegen  $\sup_{x \in D} (f + g) \leq \sup_{x \in D} f + \sup_{x \in D} g$ .

**Definition:** (Funktionsreihe)

Sei  $(f_k)$  eine Funktionenfolge auf  $D$ . Definiere eine neue Funktionenfolge  $(s_n)$  durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$(s_n)$  heißt **unendliche Reihe** oder **Reihe der Funktionen**  $(f_k)$ .  
 $f_k$  heißen **Glieder** der Reihe und  $s_n$  **Teil- oder Partialsummen**.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

**Definition:** (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  heißt **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent**, wenn die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

Die Grenzfunktion  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  heißt **Summe** der Reihe (oder Summenfunktion).

Schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

**Definition:** (Gleichmäßig absolut konvergent)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von auf  $D$  beschränkten Funktionen heißt **gleichmäßig absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$  konvergiert.

**Bemerkung:** Falls  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig absolut konvergent, so folgt auch die gleichmäßige Konvergenz, denn es gilt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty},$$

wegen  $\sup_{x \in D} (f + g) \leq \sup_{x \in D} f + \sup_{x \in D} g$ .

# Konvergenz von Funktionenreihen

**Satz:** (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)  
 Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  mit auf  $D$  beschränkten Funktionen  $f_k$  konvergiert auf  $D$  genau dann gleichmäßig, wenn gilt:  
 Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} < \epsilon.$$

**Satz:** (Gliederweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)  
 Jede gleichmäßig konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von auf  $[a, b]$  integrierbaren Funktionen besitzt auf  $[a, b]$  eine integrierbare Summenfunktion  $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  und es gilt:

$$\int_a^b s(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

**Satz:** (Majoranten-Kriterium von Weierstraß)  
 Für die Glieder der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gelte für  $k > k_0 \in \mathbb{N}$

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \alpha_k,$$

wobei  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  eine konvergente Zahlenreihe ist.  
 Dann ist die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig absolut konvergent.

Die Zahlenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  heißt **Majorante** der Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ .

**Satz:** (Stetigkeit der Reihensumme)  
 Seien  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ .  
 Dann ist die Summe  $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  ebenfalls stetig in  $[a, b]$ .

In den Randpunkten ist dabei einseitige Stetigkeit von  $f_k$  und  $s$  gemeint.

**Satz:** (Gliederweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)  
 Es gelte:

- Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  ist eine Reihe auf  $[a, b]$  differenzierbarer Funktionen.
- Es existiert die Grenzfunktion  $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  für wenigstens ein  $x \in ]a, b[$ .
- Die Ableitungen  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$  konvergieren gleichmäßig auf  $[a, b]$ .

Dann ist auch die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent in  $]a, b[$ .  
 Weiter ist die Summe  $s'(x)$  gleichmäßig konvergent und  $s'(x)$  kann gliederweise abgelesen werden:

$$s'(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'$$



**Satz:** (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  mit auf  $D$  beschränkten Funktionen  $f_k$  konvergiert auf  $D$  genau dann gleichmäßig, wenn gilt:

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} < \epsilon.$$

**Satz:** (Majoranten-Kriterium von Weierstraß)

Für die Glieder der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gelte für  $k > k_0 \in \mathbb{N}$

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \alpha_k,$$

wobei  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  eine konvergente Zahlenreihe ist.

Dann ist die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig absolut konvergent.

Die Zahlenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  heißt **Majorante** der Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ .

**Satz:** (Stetigkeit der Reihensumme)

Seien  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ .  
Dann ist die Summe  $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  ebenfalls stetig in  $[a, b]$ .

In den Randpunkten ist dabei einseitige Stetigkeit von  $f_k$  und  $s$  gemeint.

**Satz:** (Gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)

Es gelte:

- Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  eine Reihe auf  $[a, b]$  differenzierbarer Funktionen.
- Es existiere die Grenzsumme  $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  für wenigstens ein  $x \in [a, b]$
- Die Ableitungsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  sei gleichmäßig konvergent in  $[a, b]$ .

Dann ist auch die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent in  $[a, b]$ .

Weiter ist die Summe  $s(x)$  differenzierbar und  $s'(x)$  kann durch gliedweises differenzieren berechnet werden:

$$s'(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k.$$

**Satz:** (Gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)

Jede gleichmäßig konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von auf  $[a, b]$  integrierbaren Funktionen besitzt auf  $[a, b]$  eine integrierbare Summenfunktion  $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  und es gilt:

$$\int_a^b s(x) \, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx.$$

