Analysis II

J. Behrens

11.05.2017

① Beispiel einer Reihe: geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

- Setze zunächst $q \neq 1$
- s_n Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$$\Rightarrow q \cdot s_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

- $\Rightarrow s_n - q s_n = 1 - q^{n+1}$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Für $|q| < 1$ ist (s_n) konvergent (also auch $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

- Für $|q| > 1$ wachsen s_n mit $n \to \infty$ betragsmäßig über alle endl. Grenzen

$\Rightarrow$ (s_n) divergieren $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert

- Für $q = 1$: $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = n+1$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

$\Rightarrow$ (s_n) divergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert

- Für $q = -1$: $s_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$ ex nicht.

$\Rightarrow$ (s_n) divergiert $\Rightarrow \sum a_k$ divergiert

Insgesamt: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ $\begin{cases} \text{konvergiert für } |q| < 1 \text{ mit Summe } \frac{1}{1-q} \\ \text{divergiert sonst } (|q| \geq 1). \end{cases}$

② Konvergenzkriterium für Reihen:

- Die Teilsummenfolge (s_n) einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ erfüllt das Cauchy-Kriterium

- Also: zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > n_0(\varepsilon)$$

- Nun ist $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$

- Daher gilt $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ also, Nullfolge ☒

<u>Bem:</u> Umkehrung gilt nicht!

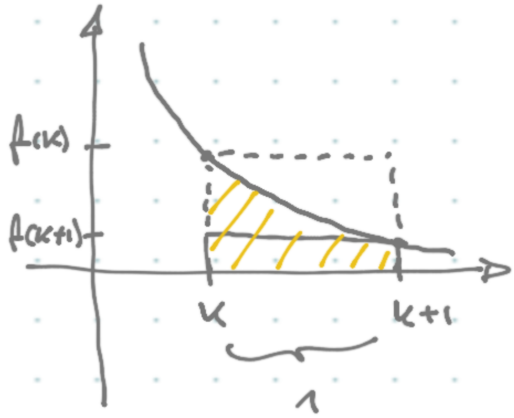
③ Beweis Integralkriterium:

- Es gilt $\forall x \in [k, k+1]$, $k \geq m$ $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$

(Monotonie

- Integration liefert:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$



- Summation von m bis n:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \geq \int_m^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

- Wende Monotonie-Kriterium für Reihen und die Monotonie-Bedingung für Integrale an:

beschränkte Partialsummen

monotone Funktion

$\Longrightarrow$ Konvergenz

⊠

Analysis II

12.05.2017

① Beispiel einer Reihe: geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Sei zunächst $q \neq 1$.

- Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

$$q \cdot s_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n - q s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Für $|q| < 1$ ist (s_n) konvergent (also $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

- Für $|q| > 1$ wachsen die s_n mit $n \to \infty$ betragsmäßig über alle endlichen Grenzen

$\Rightarrow (s_n)$ divergiert $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert

- Für $q = 1 \Rightarrow s_n = 1 + q + q^2 + q^n = n + 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

$\Rightarrow (s_n)$ divergiert $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert

• Für $q = -1 \Rightarrow s_n = 1 - q + q^2 - q^3 + - \cdots = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n$ existiert nicht

$\Rightarrow (s_n)$ divergiert $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert

Insgesamt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{konvergiert für } |q| < 1 \text{ mit Summe } \frac{1}{1-q}, \\ \text{divergiert sonst.} \end{cases}$$

② Konvergenzkriterium für Reihen:

- Die Teilsummenfolge (s_n) einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ erfüllt Cauchy-Kriterium
- D.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon \quad (n \geq n_0(\varepsilon))$
- Nun ist $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$
- $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k = 0$ also Nullfolge $\boxtimes$

Bem: Umkehrung gilt nicht!

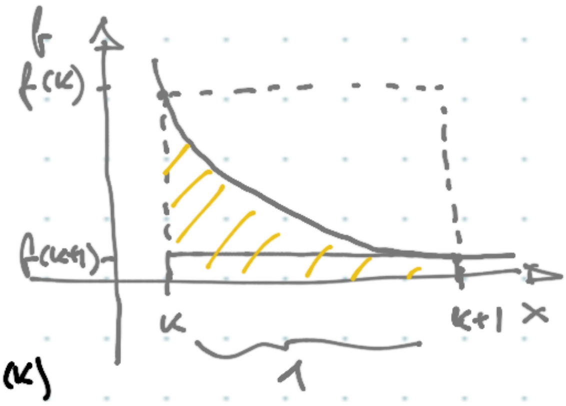
③ Integralkriterium:

- Es gilt $\forall x \in [k, k+1], k \geq m$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$

  wg. Monotonie

- Integration: $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$

- Summation von m bis n:



$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \geq \int_m^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k)$$

- Wende Monotonie-Kriterium f. Reihen und die Monotonie-Bedingung f. Integrale an

  ↑ beschränkte Partialsummen ↑ monotone Fkt.

$\Rightarrow$ Konvergenz ☒