Analyis II
TUHH
VL 12, 7. Juli 2016

Fourierreihen

Michael Hinze

Potenzreihen: nochmal Taylorreihe als spezielle Potenzreihe

Sei f ∞-oft diffbar. Dann

$$T_n(f,x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Stimmt dies immer?

$n \to \infty$:

$$f(x) = T_\infty(f,x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Das stimmt so <u>nicht</u>, denn betrachte

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \infty\text{-oft diffbar}$$

Es gilt

$$T_\infty(f,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0,$$

weil $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$ (siehe Tafel).

Eine Anwendung von Potenzreihen:

$f(t) = e^{-t^2}$, Stammfunktion zu f?

Wir wissen: $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}$ weil $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}$$ Stammfunktion zu e^{-x^2}!

Ein Ausflug nach $\mathbb{C}$; Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$ Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$.

Konvergenznachweis, Konvergenzkreisdefinition etc. geht wie im Reellen, ersetze lediglich $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$ durch $|\cdot|$ in $\mathbb{C}$.

Wähle $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$ und i imaginäre Einheit!

Dann

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots\right)$$
$$+ i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}_{\operatorname{Re} e^{ix}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}_{\operatorname{Im} e^{ix}}$$

Definition: $\cos x := \operatorname{Re} e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

$$\sin x := \operatorname{Im} e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Fourier-Analysis für periodische Funktionen

Sei f periodische Funktion mit Periode L, d.h.

$$f(x+L) = f(x) \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

OE $L = 2\pi$, dann mit $x := t \frac{L}{2\pi}$ gilt

$$\hat{f}(t) := f(x) \Rightarrow \hat{f}(t+2\pi) = \hat{f}(t)$$

Seien a_k $(k=0,1,2,\dots)$ und b_k $(k=1,2,\dots)$ reelle Zahlen.

Dann heißt

$$S_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

m-te Fouriersumme und

$$S_\infty(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

Fourierreihe.

Ziel: f 2π-periodisch. Stelle f dar als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \qquad (1)$$

Zerlegung von f in Moden

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$

Frage: a) geht das?

b) wie sehen die a_k, b_k aus?

TA: Fourierreihe konvergiere gleichmäßig!

Zu b): Multipliziere (1) mit $\cos(nx)$ und integriere von $-\pi$ bis π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right] \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos nx\,dx\right]$$

Wir haben die Orthogonalitätsrelationen (bzgl L^2-Skp $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt =: \langle f,g\rangle$)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx = \left\{\begin{matrix}\pi, & n=k\\ 0, & \text{sonst}\end{matrix}\right\} = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx \quad \text{und}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,dx = 0 \qquad \forall_{k,n\in\mathbb{N}}$$

Damit ergibt sich:
(multiplizieren auch mit $\sin nx$)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad k=0,1,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad k=1,2,\dots$$

Damit gilt dann

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

falls Fourierreihe gleichmäßig konvergent.

Beachte: a_k und b_k sind sinnvoll für integrierbares f definiert!

Frage: Konvergiert $(S_m)_m$ mit diesen Koeffizienten in irgendeiner Form gegen f, falls f nur integrierbar ist?

Ein Hilfsmittel ist die Bessel-Ungleichung: $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty$.
Dann

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \qquad \forall_{m\in\mathbb{N}}$$

Analyis II
TUHH
VL 12, 8. Juli 2016

Fourierreihen

Michael Hinze

Nochmal Taylorreihen

Sei f ∞-oft diffbar. Dann

$$T_\infty(f,x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{Taylorreihe zu } f$$

Frage: Stellt $T_\infty(f,x_0)$ immer f dar, d.h. gilt

$$f(x) = T_\infty(f,x_0) \quad \text{im Konvergenzkreis von } T_\infty(f,x_0)?$$

Nein, denn betrachte $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Beh.: f ∞-oft diffbar und $T_\infty(f,0) \equiv 0$.

Es gilt f ∞-oft diffbar mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\, p\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

mit geeignetem Polynom p endlichen, von n abhängigen Grades

Also $T_\infty(f,0) \equiv 0$!

Eine Stammfunktion zu $f(t) = e^{-t^2}$ ist $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Wie sieht diese

Stammfunktion aus? Wir wissen

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dx = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}\,dt \overset{\text{glm. Konvergenz}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!} x^{2k+1} \quad \text{Stammfunktion zu } e^{-x^2} \; !$$

Ein Ausflug nach $\mathbb{C}$: Für $z_0, z \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{Komplexe Exponentialfunktion}$$

Ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert, weil alles anwendbar ist, was wir für Potenzreihen in $\mathbb{R}$ durchgeführt haben.

Wähle spezielles $z \in \mathbb{C}$, nämlich $z = ix$ mit i Imaginäre Einheit und $x \in \mathbb{R}$. Damit

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} + i \operatorname{Im} e^{ix}$$

Wir definieren

$$\cos x := \operatorname{Re} e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sin x := \operatorname{Im} e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Fourieranalysis

<u>Idee</u>: Zerlege Funktion (= Signal) in "relevante" Moden und stelle mit Moden "irgendetwas Vernünftiges" an.

Sei f eine periodische Funktion mit $\underbrace{\text{Periode } 2\pi}$, d.h. es gilt $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall_x$

keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil mit $x = t\frac{L}{2\pi}$, $\hat{f}(t) := f(x)$. Dann hat $\hat{f}$ Periode 2π, falls f Periode L hat.

<u>Def.</u>: Seien a_k $(k=0,1,2,\dots)$ und b_k $(k=1,2,\dots)$ reelle Koeffizienten. Dann heißt

$$S_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left[a_k\cos kx + b_k\sin kx\right]$$

m-te Fouriersumme (zu a_k, b_k). Ferner heißt

$$S_\infty(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx + b_k\sin kx\right] \qquad \text{Fourierreihe.}$$

<u>Ziel</u>: Darstellung von f in der Form

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx + b_k\sin kx\right],$$

d.h. f wird "zerlegt" in Moden $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$

<u>Frage</u>:
1.) geht das, d.h. wie sind a_k, b_k zu wählen?
2.) Können wir mit den a_k, b_k aus 1.) immer Gleichheit in (1) gewährleisten?

Zur Beantwortung von 1.) erinnern wir uns an die Orthogonalitäts-relationen von Sinus und Cosinus; es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \pi, & k=n \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx ,$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0 \qquad \forall_{k,n} \in \mathbb{N}$$

Orthogonalität bzgl des SkPs $\langle f,g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt$

Berechnung der a_k, b_k in (1) multiplizieren (1) mit $\cos nx$ und integrieren von $-\pi$ bis π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \right) \cos nx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx \, dx$$

Analog: Mult mit $\sin nx$ (selber ausführen)

Damit $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Beachte: a_0, a_n, b_n sind wohldefiniert, falls f R-integrierbar. Damit

Def.: Sei f R-integrierbare Funktion (auf $[-\pi,\pi]$). Dann heißt

$$\mathcal{F}(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourierreihe von f!

<u>Ziel</u>: Konvergenz von $\mathcal{F}(f)$ gegen f in "geeigneten" Normen

Betrachte "Quadratmittelnorm" $\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}$

Was können wir über

$\|f - S_n\|_2$ aussagen? Dabei $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

mit a_0, a_k, b_k wie oben.

<u>Es gilt</u>:

Bessel Ungleichung: Sei f^2 integrierbar. Dann

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \qquad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

Folgt aus Def. der a_k, b_k und

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right]^2 dx$$

Damit: S_n ist Bestapproximation an f bzgl $\|\cdot\|_2$ unter allen möglichen Fouriersummen!