

## 9 Integration

### 9.1 Das bestimmte Integral

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

**Definition:** Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung** (Partition, Unterteilung) des Intervalls  $[a, b]$ .

Die **Feinheit** der Zerlegung  $Z$  ist dabei definiert durch

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit  $\mathbf{Z}$  bzw.  $\mathbf{Z}[a, b]$  die Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$ . □

## Riemannsche Summen.

**Definition:** Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \text{für } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung  $Z$ ,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $Z$ ,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Obersumme** von  $f(x)$  zur Zerlegung  $Z$ . □

## Eigenschaften von Riemannschen Summen.

**Beobachtung:** Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für eine *feste* Zerlegung  $Z$  gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist  $Z_1$  eine *feinere* Zerlegung als  $Z_2$ , d.h.  $Z_2 \subset Z_1$ , dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen  $Z_1$  und  $Z_2$  gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

□

## Das Riemannsche Integral.

**Beobachtung:** Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\int_a^b f(x) \, dx := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{z}[a, b]\} \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{z}[a, b]\} \quad (\text{Oberintegral})$$

**Definition:** Eine Funktion  $f(x)$  heißt (**Riemann-**) **integrierbar** über  $[a, b]$ , falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen, d.h.

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

das (**Riemann-**) **Integral** von  $f(x)$  über  $[a, b]$ . □

**Beispiele.** Die konstante Funktion  $f(x) \equiv c$  ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c (x_{i+1} - x_i) = c (b - a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x) dx = c (b - a).$$

• Für  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , und  $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$  gilt

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

somit

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

## Weitere Beispiele.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung:  $\mathcal{U}_f(Z) = 0$ , aber  $\mathcal{O}_f(Z) = 1$ .

Somit ist die Funktion  $f$  **nicht** integrierbar.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq c \\ 1 & : x = c \end{cases}$$

für  $a \leq c \leq b$ . Dann ist die Funktion  $f$  integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0,$$

denn es gilt

$$\mathcal{U}_f(Z) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \mathcal{O}_f(Z) \leq 2\|Z\|.$$

**Satz:** Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  integrierbar auf  $[a, b]$ . Dann gilt:

(a) Für  $a \leq c \leq b$  ist  $f$  auf  $[a, b]$  integrierbar, genau dann wenn  $f$  auf  $[a, c]$  und auf  $[c, b]$  integrierbar ist, und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

(b) **Linearität:** Mit  $f$  und  $g$  ist auch  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , integrierbar:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

(c) **Positivität:** Falls  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

(d) **Monotonie:** Falls  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

## Standardabschätzungen.

**Satz:** Sei  $f$  integrierbar über  $[a, b]$ . Dann gelten die Abschätzungen

$$(b - a) \cdot \inf(f[a, b]) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b - a) \cdot \sup(f[a, b]).$$

und weiterhin

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq (b - a) \cdot \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

Falls  $|f(x)|$  integrierbar ist, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$



**Beweis:** Für die Zerlegung  $Z = \{a, b\}$  von  $[a, b]$  folgt sofort

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) = \mathbf{U}_f(Z) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \mathbf{O}_f(Z) = \sup(f[a, b]) \cdot (b - a)$$

Weiterhin folgt wegen  $\pm f(x) \leq |f(x)|$ , für alle  $x \in [a, b]$ , die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq \mathbf{O}_{|f|}(Z) = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \cdot (b - a).$$



**Bemerkung:** Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx$$

liefert insbesondere die Positivität des Integrals.



## Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

gilt für beliebige Anordnungen von  $a, b, c$ .

Wir definieren daher

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

sowie

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

- Ist  $f(x)$  integrierbar, so gilt

$$R_f(Z_m) \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

für alle Zerlegungsfolgen  $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a, b]$  mit  $\|Z_m\| \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ . □

## 9.2 Kriterien für Integrierbarkeit

**Satz:** (Riemannsches Kriterium)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:

(a)  $f(x)$  ist integrierbar über  $[a, b]$ .

(b) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$  mit  $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$ .

**Beweis:** Für  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$  mit

$$0 \leq O_f(Z) - \int_a^b f(x) \, dx < \varepsilon/2,$$

$$0 \leq \int_a^b f(x) \, dx - U_f(Z) < \varepsilon/2.$$

(a)  $\Rightarrow$  (b): Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Die Integrierbarkeit von  $f$  folgt direkt aus (b) mit

$$0 \leq \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \leq O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## Monotone Funktionen sind integrierbar.

**Satz:** Eine beschränkte monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.

**Beweis:** Für eine uniforme Zerlegung  $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$  mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b - a), \quad 0 \leq j \leq n,$$

und für  $f$  monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j))(x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes  $n$ . Nach dem Riemannschen Kriterium ist  $f$  integrierbar.

Analog zeigt man die Integrierbarkeit für  $f$  monoton fallend. ■

## Stetige Funktionen sind integrierbar.

**Satz:** Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.

**Beweis:**  $f$  ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum  $[a, b]$ . Daher gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Für eine Zerlegung  $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$  mit Feinheit  $\|Z\| < \delta$  gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  nach dem Riemannsches Kriterium integrierbar. ■

**Satz:** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare beschränkte Funktionen. Dann gilt:

(a) Das Produkt  $f(x) \cdot g(x)$  ist integrierbar über  $[a, b]$ .

(b) Gilt  $g(x) \geq C > 0$ , so ist der Quotient  $f(x)/g(x)$  integrierbar über  $[a, b]$ .

**Beweis:** (a): Für eine feste Zerlegung  $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$  gilt

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y} (f(x)g(x) - f(y)g(y)) \\ &= \sup_{x,y} (f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)) \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y} (g(x) - g(y)) + \|g\|_\infty \sup_{x,y} (f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

und somit

$$O_{f \cdot g} - U_{f \cdot g} \leq \|f\|_\infty (O_g - U_g) + \|g\|_\infty (O_f - U_f),$$

womit die Integrierbarkeit von  $f \cdot g$  mit dem Riemannsches Kriterium folgt. ■

**Beweis von (b):** Für eine feste Zerlegung  $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$  gilt

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup \left( \frac{1}{g} \right) [x_j, x_{j+1}] - \inf \left( \frac{1}{g} \right) [x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y} \left( \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right) \\ &= \sup_{x,y} \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \\ &\leq \frac{1}{C^2} \cdot \sup_{x,y} (g(y) - g(x)) \end{aligned}$$

und somit

$$O_{1/g} - U_{1/g} \leq \frac{1}{C^2} \cdot (O_g - U_g),$$

womit die Integrierbarkeit von  $1/g$  mit dem Riemannschem Kriterium folgt. Insgesamt folgt mit (a) die Integrierbarkeit von  $f/g$ . ■

## Spezialfälle integrierbarer Funktionen.

**Satz:** Sei  $f$  integrierbar über  $[a, b]$ . Dann sind folgende Funktionen integrierbar.

$$|f|(x) := |f(x)|$$

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

**Beweis:** Aus

$$\sup_{x,y} (|f(x)| - |f(y)|) \leq \sup_{x,y} (f(x) - f(y))$$

folgt die Integrierbarkeit der Funktion  $|f|$ . Die Integrierbarkeit von  $f^+$  und  $f^-$  folgt aus den Relationen  $f^+ = (|f| + f)/2$  und  $f^- = (|f| - f)/2$ . ■