

---

# Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

*Prof. Dr. Timo Reis*  
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg  
Sommersemester 2015

1

---

## Informationsquellen

---

### Informationsquellen.

- **Internet**

[www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/15/](http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/15/)

- **Vorlesung**

Mittwoch, 08:00–09:30, Audimax 1, ab 1.4.2015

Freitag, 13:15–14:45, Audimax 1, ab 10.4.2015

- **Übungen in Tutorgruppen**

Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen)

- **Hörsaalübung**

Dr. Kai Rothe.

Montag, 15:00–16:30, Audimax 2, ab 13.4.2015

Dienstag, 15:00–16:30, Audimax 2, ab 7.4.2015

- **Sprechstunde**

**Prof. Reis:**

Freitag, SBS 95-E, Raum 3.079, 11:00–12:00.

2

## Literaturquellen.

### PRIMÄR:

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:  
Mathematik für Ingenieure 1,  
4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.
- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:  
Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1,  
4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

### SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.  
Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,  
Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

## Literaturquellen.

### SEKUNDÄR (cont.):

- G. Bärwolff: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure.  
Elsevier, Spektrum Akad. Verl., München 2006
- H. Neunzert, W. Eschmann, A. Blickensdörfer, K. Schelkes: Analysis 1 Ein Lehr- und  
Arbeitsbuch für Studienanfänger  
Springer, Berlin, 1993.
- N. Herrmann: Höhere Mathematik  
Oldenbourg, München, 2009.

## Inhalte Analysis II.

- Fixpunkt-Iteration
- Potenzreihen
- Elementare Funktionen
- Integration
- Kurven und Kurvenintegrale
- Periodische Funktionen, Fourier-Reihen
- Interpolation
- Numerische Quadratur

---

### Kapitel 7: Fixpunkt-Iteration

---

## 7 Fixpunkt-Iteration

**Ziel:** Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung  $f(x) = 0$ .

**Möglichkeiten:**

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots,$$

**Iteratives Verfahren:** Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion  $\Phi$  und Startwert  $x_0$ , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) = \Phi(x^*).$$

## Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt  $f(x) = 0$  das **Fixpunkt-Problem**

$$x = \Phi(x)$$

mit der **Fixpunkt-Iteration**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

**Beispiel: Newton-Iteration.** Hierbei ist

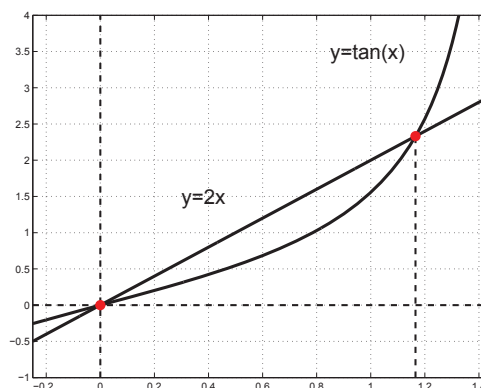
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

**ABER:** Verfahrensfunktion  $\Phi$  ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

## Beispiel.

Suche im Intervall  $(0, \pi/2)$  die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



**Lösungsmöglichkeiten:**

- Iteration mit  $x = \frac{1}{2} \tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit  $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

## Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$ , aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

**Bemerkung:** Die **Konvergenzgeschwindigkeit** hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

**Definition:** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow V$ ,  $D \subset V$ , heißt **Lipschitz-stetig** auf  $D$ , falls eine Konstante  $L$  existiert, so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante  $L$  nennt man **Lipschitz-Konstante**. □

**Definition:** Eine Abbildung  $\Phi : D \rightarrow V$ ,  $D \subset V$ , heißt **kontrahierend**, falls  $\Phi$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L < 1$ . Man nennt in diesem Fall  $L$  die **Kontraktionskonstante** von  $\Phi$ . □

**Bemerkungen:**

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \quad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist  $\Phi$  nicht notwendigerweise kontrahierend. □

**Beispiel:** Die Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$  mit  $L = 1$ .

**Satz:** Jede  $C^1$ -Funktion  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig auf  $[a, b]$  mit der Lipschitz-Konstanten

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

**Beweis:** Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| |x - y| \leq L |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$



### Beispiele:

- Die Sinusfunktion  $\sin(x)$  ist Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$  mit  $L = 1$ .
- Der Logarithmus  $\log(x)$  ist Lipschitz-stetig auf  $[1, \infty)$  mit  $L = 1$ .
- Die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  ist Lipschitz-stetig auf  $(-\infty, 0]$  mit  $L = 1$ .
- Die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  ist **nicht** Lipschitz-stetig auf  $[0, \infty)$ .

**Satz (Banachscher Fixpunktsatz):**

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei  $D \subset V$ ,  $D \neq \emptyset$ , abgeschlossen und  $\Phi : D \rightarrow D$  eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante  $L < 1$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt genau einen **Fixpunkt**  $x^*$  von  $\Phi$  in  $D$ , d.h.  $\Phi(x^*) = x^*$ ;  
 (b) Für jeden Startwert  $x_0 \in D$  konvergiert die **Fixpunkt-Iteration**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen den Fixpunkt  $x^*$ ;

- (c) Es gilt die **a priori-Fehlerabschätzung**

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|;$$

und die **a posteriori-Fehlerabschätzung**

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

**Beweis: (b):** Sei  $x_0 \in D$  beliebig. Dann gilt  $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .  
Somit ist  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $D$ , wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n}\|x_n - x_{n-1}\| \quad \text{für } k \geq n.$$

Für  $m \geq n \geq k$  ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left( \sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n} \right) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} L^j \right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist Cauchy-Folge mit Grenzwert  $x^* \in D$ , d.h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ .

Wegen der Stetigkeit von  $\Phi$  und mit  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  folgt daraus  $x^* = \Phi(x^*)$ .

**(a):** Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt  $x^{**} \in D$ , mit  $x^* \neq x^{**}$ .

Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \leq L\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

**(c):** Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$



**Beispiel.** Berechne Fixpunkt von  $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$  auf  $D = [-1, 1]$ .

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- $D$  ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt  $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$  und somit  $\Phi(D) \subset D$ ;
- es gilt  $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$  für alle  $x \in D$ ;
- somit ist  $\Phi$  kontrahierend auf  $D$  mit  $L = e/10 < 1$ .

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt  $x^* \in D$  von  $\Phi$  mit der Iteration  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ .

Setze  $x_0 = 1$ . Dann bekommt man  $x_1 = 0.2718281828 \dots$ , und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

Für  $\varepsilon = 10^{-6}$  bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq 11.$$

## 8 Potenzreihen und elementare Funktionen

### 8.1 Gleichmäßige Konvergenz

**Definition:** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  für  $D \subset \mathbb{C}^m$ , eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- **punktweise** gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad \text{für alle } z \in D.$$

- **gleichmäßig** gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

□

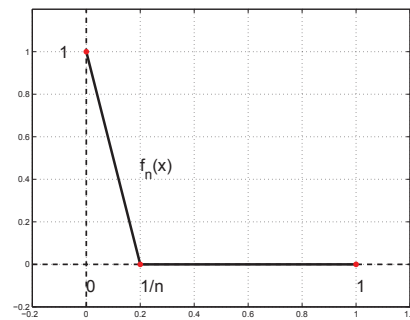
**Bemerkung:** Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

□



**Gegenbeispiel.** Betrachte die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von  $f_n(x)$ .

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert  $(f_n)_n$  *nicht* gleichmäßig gegen  $f$ , denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

**Satz:** Falls eine Folge  $(f_n)_n$  stetiger Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}^m$ , gleichmäßig auf  $D$  gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert, so ist  $f$  stetig auf  $D$ .

**Beweis:** Zeige die Stetigkeit von  $f$  in  $z_0 \in D$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$  gegeben und  $n$  hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle  $\delta > 0$  hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $z \in D$  mit  $\|z - z_0\| < \delta$ . ■

## Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

**Satz:** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Funktionenfolge mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}^m$ , und gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf  $D$ .

**Beweis:** Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^m f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

**Folgerung:** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge stetiger Funktionen mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}^m$ , so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig konvergiert auf  $D$ . Dann ist  $f$  stetig auf  $D$ . □

## Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

**Satz:** Sei  $(f_n)_n$  eine Folge differenzierbarer Funktionen  $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x), \quad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf  $(a, b)$  sind. Dann ist die Funktion  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$ , und es gilt  $f' = g$ , d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

□