

## 13 Numerische Quadratur

**Ausgangssituation:** Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

mit einem *numerischen* Algorithmus.

Verwenden **Numerische Quadratur (Quadraturformel)** der Form

$$I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit

- **Knoten**  $x_i \in [a, b]$ , für  $i = 0, 1, \dots, n$ ;
- **Gewichten**  $g_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ .

## 13.1 Newton-Cotes Formeln

**Grundidee:** Verwende Interpolationspolynom  $p_n$  zu Daten

$$(x_i, f(x_i)) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

und integriere die Interpolante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{mit } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

**Ergebnis:** Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

## Konstruktion der Newton-Cotes Formeln.

**Vereinfachung:** Verwenden äquidistante Knoten

$$x_i = a + ih, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \text{wobei } h = (b - a)/n.$$

**Ergebnis:** Newton-Cotes-Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = (b - a) \sum_{i=0}^n \alpha_{in} f(x_i)$$

mit Gewichten

$$\alpha_{in} = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{s - j}{i - j} ds \quad \text{für } 0 \leq i \leq n,$$

unter Verwendung der Substitution  $s = (x - a)/h$ . □

## Die Trapezregel.

Wähle  $n = 1$  und somit  $x_0 = a$  und  $x_1 = b$ . Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x - a}{b - a} \cdot f(b) + \frac{b - x}{b - a} \cdot f(a)$$

und somit bekommt man die beiden Gewichte

$$\alpha_{01} = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Daraus folgt die **Trapezregel**

$$I[f] \approx I_1[f] = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

## Die Simpsonregel.

Wähle  $n = 2$  und somit

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$$

Damit bekommt man die drei Gewichte

$$\alpha_{02} = \frac{1}{4} \int_0^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{4} \int_0^2 x(x-1) dx = \frac{1}{6}$$

Daraus folgt die **Simpsonregel**

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right).$$

## Zwei weitere Newton-Cotes-Formeln.

- 3/8-Regel.

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8} \left( f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right)$$

- Milne-Regel.

$$I_4[f] = \frac{b-a}{90} \left[ 7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + 32f\left(a + 3\frac{b-a}{4}\right) + 7f(b) \right]$$

## Übersicht: Gewichte der Newton-Cotes Formeln.

$n$	$\alpha_{in}$					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson-Regel
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		3/8-Regel
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne-Regel

### Satz:

Die **Newton-Cotes-Formel**  $I_n[f]$  integriert Polynome vom Grad  $\leq n$  exakt.

**Beweis:** Das Interpolationspolynom  $p_n \in \mathcal{P}_n$  zu den  $n + 1$  Daten  $(x_i, f(x_i))$ ,  $0 \leq i \leq n$ , rekonstruiert  $f \in \mathcal{P}_n$  exakt, d.h.  $f \equiv p_n$ , und daher gilt

$$I[f] = I[p_n] = \int_a^b p_n(x) dx = I_n[f] \quad \text{für alle } f \in \mathcal{P}_n. \quad \blacksquare$$

## Quadraturfehler der Newton-Cotes Formeln.

$R_n[f] := I_n[f] - I[f]$  heißt **Quadraturfehler** der Quadraturformel  $I_n(f)$ .

**Erinnerung:** Darstellung für den Interpolationsfehler:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

**Beispiel:** Für den Quadraturfehler der Trapezregel ( $n = 1$ ) gilt

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \int_a^b (p_1(x) - f(x)) \, dx = - \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x-a)(x-b) \, dx \\ &= - \frac{f^{(2)}(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) \, dx = \frac{1}{12} f^{(2)}(\tilde{\xi}) (b-a)^3 \end{aligned}$$

und somit gilt für  $h = b - a$  die Fehlerabschätzung

$$|R_1[f]| = |I_1[f] - I[f]| \leq \frac{1}{12} \|f^{(2)}\|_{\infty} \cdot h^3.$$



## Quadraturfehler der Newton-Cotes Formeln.

$n$	$R_n[f]$	
1	$h^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)$	Trapezregel
2	$h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$	Simpson-Regel
3	$h^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$	3/8-Regel
4	$h^7 \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi)$	Milne-Regel

wobei jeweils

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

## Zusammengesetzte Newton-Cotes Formeln.

**Ziel:** Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$ .

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$t_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}.$$

Verwende auf jedem Teilintervall  $[t_i, t_{i+1}]$  Quadraturformel der Ordnung  $n$ .

**Beispiel:** Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \left( f(t_i) + f(t_{i+1}) \right) \\ &= h \left( \frac{f(a)}{2} + f(a + h) + \dots + f(b - h) + \frac{f(b)}{2} \right). \end{aligned}$$

□

## Fehlerabschätzung zusammengesetzte Trapezregel.

**Satz:** Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \|f^{(2)}\|_\infty.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - T(h) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left( \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) \, dx - I_1^{(j)}[f] \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) \, dx - I_1^{(j)}[f] \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^3}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\ &\leq \frac{N}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty = \frac{h^2}{12} (b - a) \|f^{(2)}\|_\infty \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Die zusammengesetzte Simpson-Regel.

Wende die Simpson-Regel auf die Teilintervalle  $[t_{2i}, t_{2i+2}]$  an, mit Knoten

$$t_{2i}, \quad t_{2i+1}, \quad t_{2i+2} \quad \text{für } 0 \leq i \leq N/2 - 1,$$

wobei  $N$  gerade. Dann bekommt man die **zusammengesetzte Simpson-Regel**

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} (f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 4f(b-h) + f(b)) \end{aligned}$$

**Satz:** Für die zusammengesetzte Simpson-Regel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(h) \right| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \|f^{(4)}\|_\infty$$

**Beweis:** analog wie bei der zusammengesetzten Trapezregel. □