

## Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig,  $T$ -periodisch mit

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- **Linearität:**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha \gamma_k + \beta \delta_k) e^{ik\omega t}$$

- **Konjugation:**

$$\overline{f(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\gamma_{-k}} e^{ik\omega t}$$

- **Zeitumkehr:**

$$f(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

## Weitere Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- **Streckung:**

$$f(ct) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \quad \text{für } c > 0$$

- **Verschiebung:**

$$f(t + a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\gamma_k e^{ik\omega a}) e^{ik\omega t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

## Noch mehr Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- **Ableitung:** Ist  $f(t)$  stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k) e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega) [b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)] \end{aligned}$$

- **Integration:** Gilt  $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t) dt = 0$ , so folgt

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = -\frac{1}{T} \int_0^T \tau f(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right]$$

## Konvergenzsatz.

**Satz:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier-Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise und für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- In allen kompakten Intervallen  $[a, b]$ , in denen  $f(t)$  stetig ist, ist die Konvergenz der Fourier-Reihe gleichmäßig.

### Bemerkung:

Die Stetigkeit von  $f(t)$  reicht für die Konvergenz der Fourier-Reihe nicht aus. □

## Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

**Fehlerfunktion:** Definiere für  $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

**Es gilt:**

$$1 + 2 \cos(t) + 2 \cos(2t) \dots + 2 \cos(nt) = \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)}$$

**Integration:**

$$\int_{\pi}^t \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin(\tau/2)} d\tau = (t - \pi) + 2 \sin(t) + 2 \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + 2 \frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 R_n(t) &= \int_{\pi}^t \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{2 \sin(\tau/2)} d\tau \\
 &= \frac{-\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n + 1) \sin(t/2)} + \frac{1}{2n + 1} \int_{\pi}^t \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sin(\tau/2)} \right) d\tau \\
 &= \frac{-\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n + 1) \sin(t/2)} + \frac{\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right]}{(2n + 1)} \left( \frac{1}{\sin(t/2)} - 1 \right) \quad \text{für } \xi \in [\pi, t],
 \end{aligned}$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n + 1) \sin(t/2)}$$

Ist  $t \in (0, 2\pi)$  fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

□

## Approximation im quadratischen Mittel.

**Satz:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe von  $f$ . Für den linearen Raum

$$T_n := \text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n\omega t) \right\} \subset C(\mathbb{R})$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \quad \text{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h.  $S_n$  ist **Bestapproximation** an  $f$  aus  $T_n$  bezüglich  $\|\cdot\|$ .

**Beweis:** Die Funktionen

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_k(t) = \cos(k\omega t), \quad \psi_k(t) = \sin(k\omega t) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

bilden eine **Orthonormalbasis** des linearen Teilraums  $T_n \subset C(\mathbb{R})$ .

Dann ist die **Bestapproximation**  $s^* \in T_n$  aus  $T_n$  an  $f \in C(\mathbb{R})$  gegeben durch die **orthogonale Projektion** von  $f$  auf  $T_n$ :

$$\begin{aligned} s^*(t) &= \langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n [\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) + \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t)] \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n [a_k \varphi_k(t) + b_k \psi_k(t)] \\ &= S_n(t), \end{aligned}$$

wobei  $a_0 = \sqrt{2} \langle f, \varphi_0 \rangle$ ,  $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$  und  $b_k = \langle f, \psi_k \rangle$  für  $k = 1, 2, \dots, n$ .

■

## Die Besselsche Ungleichung.

**Satz:** Es gilt die **Besselsche Ungleichung**  $\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2$ , d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n [ |a_k|^2 + |b_k|^2 ] \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - S_n\|^2 = \langle f - S_n, f - S_n \rangle = \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle f, S_n \rangle + \|S_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \left\langle f, \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \varphi_k + b_k \psi_k) \right\rangle + \|S_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \left( \left\langle f, \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0 \right\rangle + \sum_{k=1}^n [a_k \langle f, \varphi_k \rangle + b_k \langle f, \psi_k \rangle] \right) + \|S_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2 \left( \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n [ |a_k|^2 + |b_k|^2 ] \right) + \|S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2 \end{aligned}$$



## Das Riemannsches Lemma.

**Folgerung:** *Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

und damit gilt das **Riemannsches Lemma**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$



## Konvergenzgeschwindigkeit.

**Satz:** Ist eine  $T$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) stückweise  $(m + 1)$ -fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)}$$

stetig auf  $\mathbb{R}$ , so gibt es eine Konstante  $C > 0$  mit

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Fazit:** Je glatter  $f$ , desto schneller konvergiert die Fourier-Reihe  $F_f$  gegen  $f$ .

**Beweis:** Reicht zu zeigen für  $m = 0$ . Sei  $f(t)$  stückweise stetig differenzierbar mit Unstetigkeitsstellen

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T.$$

Dann bekommt man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} T \cdot \gamma_k &= \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{ik\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ f(t) e^{-ik\omega t} \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) e^{-ik\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &\leq \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ |f(t_{j+1}^-)| + |f(t_j^+)| \right] + \frac{1}{\omega} \int_0^T |f'(t)| dt \right] \\ &= \frac{C}{|k|}, \quad \text{mit } C \equiv C(f). \end{aligned}$$



## Die Parsevalsche Gleichung.

**Bemerkung.** Für  $n \rightarrow \infty$  geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die **Parsevalsche Gleichung**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$ , d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [ |a_k|^2 + |b_k|^2 ] = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

denn die Fourier-Reihe **konvergiert im quadratischen Mittel** gegen  $f$ , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0.$$

**Beispiel:** Für die Rechteckschwingung  $R(t)$  gilt  $\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = 2$ . Da  $a_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2.$$

□

## Eindeutigkeitssatz.

**Satz:** Seien  $f(t)$  und  $g(t)$  zwei  $T$ -periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) && \text{für alle } t \in [0, T]; \\ g(t) &= \frac{1}{2} (g(t^-) + g(t^+)) && \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Weiterhin besitzen  $f$  und  $g$  dieselben Fourier-Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt &= \int_0^T g(t) \cos(k\omega t) dt && \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0; \\ \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt &= \int_0^T g(t) \sin(k\omega t) dt && \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann stimmen  $f$  und  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  überein, d.h. es gilt  $f \equiv g$ . □