

# 11 Fourier-Analysis

## 11.1 Grundlegende Begriffe

**Definition:** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) heißt **periodisch** mit der **Periode  $T$**  (oder  **$T$ -periodisch**), falls

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

**Ziel:** Entwicklung einer periodischen Funktion  $f$  in eine **Fourier-Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

**Grundschwingungen:**  $\cos(\omega t)$ ,  $\sin(\omega t)$

**Oberschwingungen:**  $\cos(k\omega t)$ ,  $\sin(k\omega t)$ ,  $k = 2, 3, \dots$

## Bemerkungen.

- Ist  $T$  eine Periode von  $f$ , so auch  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , eine Periode von  $f$ .
- Sind  $T_1$  und  $T_2$  Perioden von  $f$ , so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \quad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Perioden von  $f$ .

- Existiert eine kleinste positive Periode  $T > 0$  von  $f$ , so ist die Menge der Perioden von  $f$  gegeben durch  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion  $f$  besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind  $f$  und  $g$   $T$ -periodisch, so ist auch  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $T$ -periodisch.
- Ist  $f$   $T$ -periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$$

für beliebige  $a \in \mathbb{R}$ .

## Periodische Fortsetzungen.

**Definition:** Eine Funktion  $g(t)$ ,  $t \in [0, T]$  bzw.  $t \in [0, T/2]$  lässt sich zu einer  $T$ -periodischen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt fortsetzen.

- **Direkte Fortsetzung.**

$$f(t) := g(t - kT) \quad \text{für } kT \leq t < (k+1)T$$

- **Gerade Fortsetzung.** Sei  $g(t)$  auf  $[0, T/2]$  gegeben. Dann setze

$$f(t) := g(t - kT) \quad \text{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right)T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right)T,$$

wobei  $g$  zunächst an der  $y$ -Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

- **Ungerade Fortsetzung.** Wie oben, aber Spiegelung um Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

## Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

**Definition:**

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

heißt **Fourier-Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**). Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

der Fourier-Reihe  $f(t)$  heißen **trigonometrische Polynome** vom Grad  $n$ .

□

## Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die **Eulersche Formel**

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right] \end{aligned}$$

140

## Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad \gamma_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k),$$

womit gilt

$$a_0 = 2\gamma_0, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

**Wichtige Frage:** Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

141

## Orthonormalität der Basisfunktionen.

**Satz:** Die Funktionen  $e^{ik\omega t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega = 2\pi/T$ , bilden ein **Orthonormalsystem** bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt.$$

**Beweis:** Einerseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = 1,$$

andererseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\ell-k)\omega t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{i(\ell-k)\omega} e^{i(\ell-k)\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für  $k \neq \ell$ . ■

## Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

**Satz:** Konvergiert die Fourier-Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf  $[0, T]$  **gleichmäßig** gegen eine Funktion  $f$ , so ist  $f$  stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis:** Da  $f_n$  **stetig** und gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren, ist  $f$  stetig. Weiterhin:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-i\ell\omega t} dt &= \int_0^T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt = \gamma_\ell \cdot T. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Orthonormalität und Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$ .

$$\int_0^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq \ell \\ T/2 & : k = \ell \neq 0 \\ T & : k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq \ell \\ T/2 & : k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad \text{für } k > 0$$

### 11.2 Fourier-Reihen

#### Definition:

- Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls  $f(t)$  bis auf endlich viele Stellen auf  $[a, b]$  stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von  $f(t)$  bzw.  $f'(t)$  existieren.
- Für eine stückweise stetige Funktion  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  werden die **Fourier-Koeffizienten** von  $f(t)$  definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist  $\omega = 2\pi/T$  die **Kreisfrequenz**. □

**Bemerkung:** Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten  $\gamma_k$  bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt && \text{für } k \geq 0 \\ b_k &:= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt && \text{für } k > 0 \end{aligned}$$

**Definition:** Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier-Reihe** von  $f(t)$ . □

**Bemerkung:** Bei der obigen Definition verwendet man auch die **direkte Fortsetzung** der Funktion  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  zu einer  $T$ -periodischen Funktion.

**Satz:** Sei  $f(t)$  eine stückweise stetige,  $T$ -periodische Funktion. Dann gilt:

$$f(t) \text{ gerade} \implies a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \implies a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

**Beweis:** Beispielsweise gilt für  $f$  gerade (argumentiere für  $f$  ungerade analog):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{-T} f(-\tau) \sin(k\omega \tau) d\tau \\ &= -\frac{2}{T} \int_{-T}^0 f(\tau) \sin(k\omega \tau) d\tau = -\frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \sin(k\omega \tau) d\tau = -b_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(t) \cos(k\omega t) dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/2} f(-\tau) \cos(k\omega \tau) d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right] = \frac{4}{T} \left[ \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right]. \end{aligned}$$

## Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die **Sägezahnfunktion**

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit  $\omega = 1$ )

$$\alpha_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin(kt) \, dt = \frac{1}{k}$$

und damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$S(t) = \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

## Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die **Rechteckschwingung**

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0, t = \pi \text{ oder } t = 2\pi \\ 1 & : \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\alpha_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kt) \, dt = \begin{cases} 0 & : \text{für } k \text{ gerade;} \\ \frac{4}{k\pi} & : \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von  $R(t)$  lautet daher

$$R(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right).$$

## Noch ein Beispiel.

Betrachte  $f(t) = t^2$ ,  $-\pi < t < \pi$  mit direkter  $2\pi$ -periodischer Fortsetzung.

Die Fortsetzung ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : \text{für } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : \text{für } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos(t)}{1^2} + \frac{4 \cos(2t)}{2^2} \mp \dots$$

□