Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^{-x^2}$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$.

Aufgabe 6:

a) Man untersuche die Funktionenfolgen

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}\,,$

(ii) $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) = \dfrac{n}{n + 1 + nx^2}\,,$

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^k}\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}\,.$$

Aufgabe 7:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n , \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n .$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 8:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{2}{3z+4}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = 1 + i$.

b) Man berechne die Potenzreihe von $g(x) = \dfrac{1}{(3x+4)^3}$ zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Abgabetermin: 27.4. - 30.4.15 (zu Beginn der Übung)