Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

Aufgabe 2:

Man berechne den minimalen (euklidischen) Abstand des Funktionsgraphen von $h(x) = \ln x$ zum Ursprung unter Verwendung des

a) Bisektionsverfahrens,

b) Newton-Verfahrens.

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0\,, \\ -x^3 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$

Ist der Mittelwertsatz $g'(x_0) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ mit $x_0 \in]a, b[$ für $a = -2$ und $b = 2$ auf f anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle x_0 .

b) Für die folgenden Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

(i) $[a, b] = [0, 1]$ und $f_1(x) = 1 - x^2$,

(ii) $[a, b] = [-\pi, 0]$ und $f_2(x) = \cos \dfrac{x}{2}$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{4}{2x + 5}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f .

b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 4 \cdot 2^k \cdot k!}{(2x + 5)^{k+1}}\,.$$

c) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.

d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$.

Abgabetermin: 13.4. - 17.4.15 (zu Beginn der Übung)