
Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2014

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
Mathematik für Ingenieure 1,
4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.
- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1,
4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.
Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis II.

- Fixpunkt-Iteration.
- Gleichmäßige Konvergenz.
- Potenzreihen.
- Elementare Funktionen.
- Interpolation.
- Integration.
- Kurven und Kurvenintegrale.
- Numerische Quadratur.
- Extrapolation.
- Periodische Funktionen, Fourier-Reihen.
- Schnelle Fourier-Transformation (FFT).

7 Fixpunkt-Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots,$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0 , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) = \Phi(x^*).$$

Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das **Fixpunkt-Problem**

$$x = \Phi(x)$$

mit der **Fixpunkt-Iteration**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel: Newton-Iteration. Hierbei ist

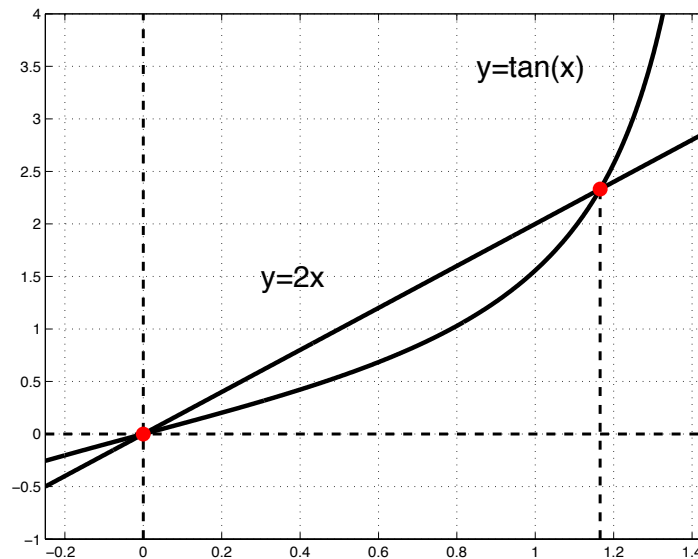
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

ABER: Verfahrensfunktion Φ ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

Beispiel.

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- Iteration mit $x = \frac{1}{2} \tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \rightarrow \infty$, aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Bemerkung: Die **Konvergenzgeschwindigkeit** hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow V$, $D \subset V$, heißt **Lipschitz-stetig** auf D , falls eine Konstante L existiert, so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L nennt man **Lipschitz-Konstante**. □

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow V$, $D \subset V$, heißt **kontrahierend**, falls Φ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Man nennt in diesem Fall L die **Kontraktionskonstante** von Φ . □

Bemerkungen:

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \quad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend. □

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} mit $L = 1$.

Satz: Jede C^1 -Funktion $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz-Konstanten

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| |x - y| \leq L |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$



Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\log(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist **nicht** Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz):

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und $\Phi : D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D , d.h. $\Phi(x^*) = x^*$;
- (b) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen den Fixpunkt x^* ;

- (c) Es gilt die a priori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|;$$

und die a posteriori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Beweis: (b): Sei $x_0 \in D$ beliebig. Dann gilt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Somit ist $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in D , wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L \|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n} \|x_n - x_{n-1}\| \quad \text{für } k \geq n.$$

Für $m \geq n \geq k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n} \right) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j \right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $x^* \in D$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

Wegen der Stetigkeit von Φ und mit $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ folgt daraus $x^* = \Phi(x^*)$.

(a): Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^* \neq x^{**}$.

Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \leq L \|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

(c): Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$



Beispiel. Berechne Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$;
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$;
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Setze $x_0 = 1$. Dann bekommt man $x_1 = 0.2718281828\dots$, und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq 11.$$

8 Potenzreihen und elementare Funktionen

8.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge.
Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- **punktweise** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad \text{für alle } z \in D.$$

- **gleichmäßig** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

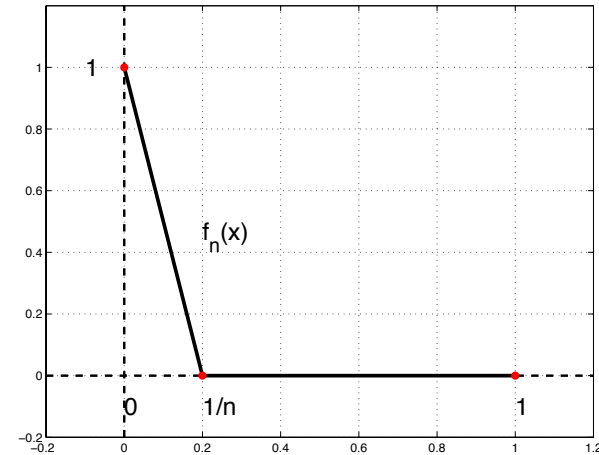
□

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

□

Gegenbeispiel. Betrachte die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von $f_n(x)$.

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *nicht* gleichmäßig gegen f , denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Satz: Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, gleichmäßig auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D .

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$. ■

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D .

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^m f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

Folgerung: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D . Dann ist f stetig auf D . □

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

Satz: Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x), \quad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b) , und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

□

8.2 Potenzreihen

Definition: *Eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt **(komplexe) Potenzreihe** zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. □

Beispiel: Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\log(z), \cos(z), \sin(z), \dots$$

Taylor-Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die **Taylor-Reihe**

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen.

- Die Taylor-Reihe einer C^∞ -Funktion ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell-analytisch**. □

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar **gleichmäßig**.

Beweis: Definiere

$$r := \sup \left\{ |w| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe **divergent**.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) **konvergent**.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$|a_k w^k| \leq M \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

und weiterhin

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1 \quad \text{für alle } k \geq 1,$$

so dass die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$. ■

Die Formel von Cauchy-Hadamard.

Satz: Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der **Formel von Cauchy-Hadamard** berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium, zusammen mit der Äquivalenz

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} \leq q < 1 &\iff \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} < 1 \\ &\iff \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| < 1 \\ &\iff |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Konvergenz von Potenzreihen.

Satz: Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

(a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

(b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Beweis: Der erste Teil von (a) folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard.

Verwende für den zweiten Teil von (a) das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \iff |z - z_0| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \iff |z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$



Zu Teil (b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy-Hadamard, womit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch.



Beispiele.

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $(k!z^k)_{k \geq 0}$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r = 0$.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.
- Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \quad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2} (2 + 6z + 12z^2 + \dots) \quad \text{für } |z| < 1$$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die **integrierte Potenzreihe**

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad \text{für } |z| < 1.$$

liefert eine **Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion**

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Potenzreihenentwicklung von \arctan .

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert Potenzreihenentwicklung

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind C^∞ -Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer **Taylor-Reihe** überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für } |x - x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- **Identitätssatz für Potenzreihen:** Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt

$$a_k = b_k \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- **Abelscher Grenzwertsatz:** Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, insbesondere in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls. □

Beispiel.

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

□

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: *Seien*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt:

(a)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2);$$

(b)

$$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \quad \text{für } |z| < r_1 \text{ und mit } \lambda \in \mathbb{C};$$

(c) **Cauchy-Produkt für Potenzreihen**

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k, \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2). \quad \square$$

Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen. Dann:

(d) Ist $f(0) = 0$, so läßt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen, d.h. es gibt ein $r_3 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{für } |z| < r_3;$$

(e) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein $r_4 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $d_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad \text{für } |z| < r_4;$$

die sich nach dem Cauchy-Produkt in (c) wie folgt rekursiv berechnen.

$$a_0 d_0 = 1, \quad a_0 d_k = - \sum_{\ell=0}^{k-1} d_\ell a_{k-\ell}, \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad \square$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 1. Wir definieren den **cosinus hyperbolicus** für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog erhält für $x \in \mathbb{R}$ den **sinus hyperbolicus** mit

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

□

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 2. Für

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} \right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \right) \cdot (1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!} \right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!} \right) x^3 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \right) x^4 + \dots \quad \text{für } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

□

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 3. Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ verwenden wir den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

und damit gilt

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^\ell \right)$$

Fortsetzung von Beispiel 3.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{\ell!} x^{\ell} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k \frac{B_{\ell}}{\ell!(k-\ell+1)!} \right) x^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{\ell=0}^k \frac{B_{\ell}}{\ell!(k-\ell+1)!} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0; \\ 0 & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Damit bekommt man

$$B_0 = 1, \quad B_k = - \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{k!}{\ell!(k-\ell+1)!} B_{\ell} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

Die Zahlen B_k nennt man **Bernoullische Zahlen**:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots, \quad \square$$

8.3 Elementare Funktionen

Die **Exponentialfunktion** ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k,$$

hat Konvergenzradius $r = \infty$, und daher ist $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1.$$

Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichung.

Suche zu $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0)). \quad \square$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Funktionalgleichung: Es gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Folgerung: Für die Exponentialfunktion gilt:

- (a) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$;
- (b) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$;
- (c) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- (d) Asymptotisches Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \infty, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

Beweis: (a),(b): Mit Funktionalgleichung gilt $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$.

(c): $\exp(x)$ ist stetig, hat keine Nullstelle, und es gilt $\exp(0) = 1$.

(d): Für $x > 0$ gilt $\exp(x) > 1 + x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$.

Mit $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ folgt daraus $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = 0$. ■

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Satz: Für die Exponentialfunktion gilt weiterhin:

(e)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(f) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

(g) Für die **Eulersche Zahl** $e := \exp(1)$ gilt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.7182\ 81828\ 45904\ 52353\ 60287 \dots$$

Die Eulersche Zahl e ist eine **irrationale Zahl**.

(h) Es gilt $\exp(q \cdot x) = (\exp(x))^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Beweise zu den weiteren Eigenschaften von \exp .

Beweis: (e): Mit der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{\exp(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0.$$

(f): folgt zusammen mit Eigenschaften (c),(d) aus

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) > 0$$

(g): Folgt mit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

und der Regel von l'Hospital für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

(h): Es gilt $\exp(nz) = (\exp(z))^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\exp(x/m) = \sqrt[m]{\exp(x)}$ für $m \in \mathbb{N}$ sowie $\exp\left(\frac{n}{m}x\right) = (\exp(x))^{n/m}$ für $n, m \in \mathbb{N}$. \square

Der natürliche Logarithmus.

Da die Exponentialfunktion auf \mathbb{R} streng monoton wachsend ist, besitzt

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

eine eindeutige Umkehrfunktion,

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Umkehrfunktion nennt man den **natürlichen Logarithmus**.

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

- (a) $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.
- (b) Es gilt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$.
- (c) Es gilt die **Funktionalgleichung**

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

□

Weitere Eigenschaften des Logarithmus.

(d) Potenz:

$$\log(x^q) = q \cdot \log(x) \quad \text{für alle } x > 0, q \in \mathbb{Q}.$$

(e) Spezielle Funktionswerte:

$$\log(1) = 0 \quad \text{und} \quad \log(e) = 1$$

(f) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

(g) Es gilt die **Potenzreihenentwicklung**

$$\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

□

Die allgemeine Potenzfunktion.

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \log(a))$$

Wir definieren daher **allgemeine Potenzen** wie folgt.

$$a^z := \exp(z \cdot \log(a)) \quad \text{für } a > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

(a) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf \mathbb{R} streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

(b) Es gilt

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

□

Weitere Eigenschaften der allgemeinen Potenz.

(c) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a(x)$$

den **Logarithmus zur Basis a** , wobei gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{für } x > 0.$$

(d) Es gelten die Differentiationsregeln

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \log(a) \cdot a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = a \cdot x^{a-1} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \log(a)} \quad \text{für } x, a > 0.$$

□

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Satz: *Es gilt*

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \text{für } a \in \mathbb{R}, -1 < x < 1,$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Beweisidee: Rechte Seite löst Differentialgleichung $(1+x)g'(x) = a \cdot g(x)$. \square

Spezialfälle. Für $-1 < x < 1$ gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \mp \dots \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$
$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Die Funktionen \sin und \cos besitzen jeweils Konvergenzradius $r = \infty$, sind somit auf ganz \mathbb{C} erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

(a) \sin ist eine **ungerade**, \cos eine **gerade** Funktion, d.h. es gilt

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Weiterhin gilt: $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. □

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

(c) Es gilt:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{und} \quad e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = (\sin(x) \cosh(y)) + i(\cos(x) \sinh(y))$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = (\cos(x) \cosh(y)) - i(\sin(x) \sinh(y))$$

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

(d) Es gelten die **Funktionalgleichungen**

$$\sin(u + v) = \sin(u) \cos(v) + \cos(u) \sin(v),$$

$$\cos(u + v) = \cos(u) \cos(v) - \sin(u) \sin(v).$$

(e) Für die *reellen* Ableitungen bekommt man

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x).$$

Tangens- und Kotangensfunktion.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$,

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Eigenschaften:

(a) \tan und \cot sind π -periodische, ungerade Funktionen.

(b) Es gilt

$$\tan(z) = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot(z) = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Reihen-Entwicklung von Tangens und Kotangens.

Es gelten die Reihen-Entwicklungen

$$\tan(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| z^{2k-1} \quad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}| z^{2k-1} \quad \text{für } 0 < |z| < \pi$$

mit den **Bernoullischen Zahlen** B_{2k} . □

Reelle Ableitungen: Im jeweiligen Definitionsbereich gilt

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Hyperbolische Funktionen.

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned}\cosh(z) &:= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})\end{aligned}$$

mit den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} && \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \sinh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} && \text{für } z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

□

Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen.

(a) Die Funktion \cosh ist **gerade** und \sinh ist **ungerade**, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx} \sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

(c) Es gelten die **Funktionalgleichungen**

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

(d) Es gilt die algebraische Relation

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1. \quad \square$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen.

Die Funktion \sinh ist streng monoton wachsend auf \mathbb{R} ,
die Funktion \cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit **arcosh** und **arsinh**.

Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) && \text{für } 1 \leq x < \infty\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} && \text{für } 1 \leq x < \infty\end{aligned}$$

□

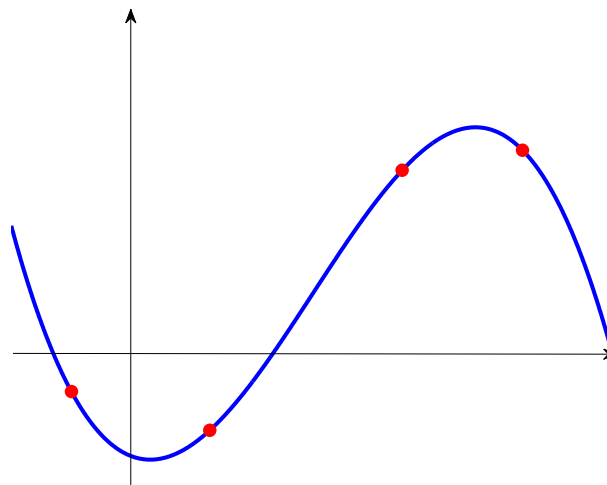
9 Interpolation

9.1 Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an $n + 1$ **Stützstellen**

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

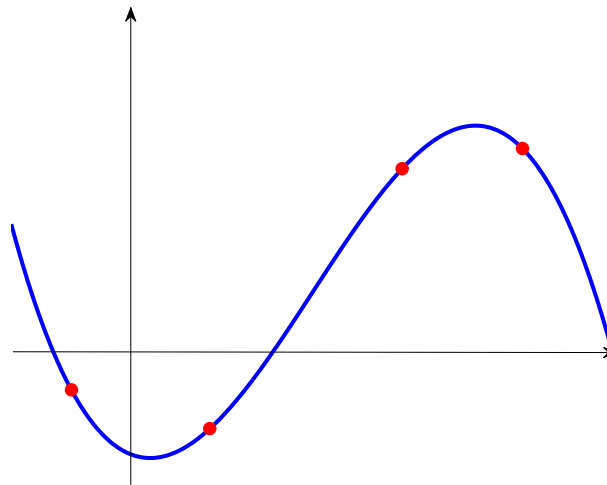


Gegebene Daten (x_j, f_j) .

Gesucht: *Einfache* Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Daten **interpoliert**, d.h.

$$p(x_i) = f_i \quad \text{für alle } i = 0, 1, \dots, n,$$

z.B.: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.



Gegebene Daten (x_j, f_j) .

Fragen:

- Gibt es so ein p ? Falls ja, ist p eindeutig?
- Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p ?

Klassische Polynom-Interpolation.

Bestimme ein Polynom (höchstens) n -ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, so dass $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz: Die Interpolationsbedingungen ergeben lineares System

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= f_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= f_n \end{aligned}$$

Setze:

$$X = \{x_0, \dots, x_n\}, f|_X = (f_0, \dots, f_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ und } a = (a_0, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vandermonde-Matrix.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

kurz

$$V \cdot a = f|_X,$$

heißt **Vandermonde-Matrix**.

Satz: Für die Determinante der Vandermonde-Matrix $V \equiv V(x_0, \dots, x_n)$ gilt

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Beweis: Durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: $n = 1$: $\det(V(x_0, x_1)) = x_1 - x_0$.

Induktionsschritt: $n - 1 \rightarrow n$.

$\det(V(x_0, \dots, x_n))$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad \blacksquare$$

Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation.

Folgerung: Falls Stützstellen x_0, \dots, x_n paarweise verschieden, so ist V regulär.

Satz: *Zu paarweise verschiedenen Stützstellen*

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \quad \text{für alle } 0 \leq i \leq n.$$



ABER: Wir berechnen die Lösung **nicht** über das lineare System $V \cdot a = f|_X$.

DENN: Dies ist zu **teuer** und **instabil**.



9.2 Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Lagrange-Darstellung.

Definieren **Lagrange-Polynome**

$$\begin{aligned}L_j(x) &:= \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n , und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{für } 0 \leq i, j \leq n.$$

Lösung mit der Lagrange-Darstellung.

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \quad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + \dots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x).$$

Die obige Darstellung von p_n heißt **Lagrange-Darstellung**. □

Beispiel. Betrachte die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann sieht die zugehörige Lagrange-Basis wie folgt aus.

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} & L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} & L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}\end{aligned}$$

Das interpolierende kubische Polynom p_3 besitzt die Darstellungen

$$\begin{aligned}p_3(x) &= 4 \cdot L_2(x) + 18 \cdot L_3(x) \\&= -4 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\&= x^3 - x^2.\end{aligned}$$

Auswertung von Interpolationspolynomen.

Für $0 \leq j \leq k \leq n$ bezeichne p_{kj} das eindeutige Interpolationspolynom vom Höchstgrad j zu den Daten

$$(x_{k-j}, f_{k-j}), \dots, (x_k, f_k),$$

d.h. es gilt

$$p_{kj}(x_\ell) = f_\ell, \quad \text{für alle } k-j \leq \ell \leq k.$$

Dann lassen sich für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Werte $p_{kj}(x)$ rekursiv berechnen.

Lemma (AITKEN): *Es gilt die Rekursion*

$$p_{k0}(x) = f_k$$

$$p_{kj}(x) = p_{k,j-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k-j} - x_k} (p_{k-1,j-1}(x) - p_{k,j-1}(x)) \quad \text{für } j \geq 0.$$

Beweis: Vollständige Induktion über j .

Induktionsanfang: Für $j = 0$ ist p_{k0} konstant mit $p_{k0} \equiv f_k$.

Induktionsschritt: $j - 1 \rightarrow j$: Die rechte Seite der Rekursion,

$$q(x) = p_{k,j-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k-j} - x_k} (p_{k-1,j-1}(x) - p_{k,j-1}(x))$$

ist ein Polynom vom Höchstgrad j .

Weiterhin interpoliert $p_{k,j-1}$ nach Induktionsvoraussetzung die Daten

$$(x_{k-j+1}, f_{k-j+1}), \dots, (x_k, f_k),$$

und $p_{k-1,j-1}$ interpoliert die Daten

$$(x_{k-j}, f_{k-j}), \dots, (x_{k-1}, f_{k-1}).$$

Daraus folgt mit der Rekursion, dass das Polynom q die Daten

$$(x_{k-j}, f_{k-j}), \dots, (x_k, f_k)$$

interpoliert, genauso wie p_{kj} . Wegen der Eindeutigkeit gilt $q \equiv p_{kj}$. ■

Algorithmus von Neville-Aitken.

Ziel: Rekursive Berechnung von $p_{nn}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ in Dreiecksschema:

$$\begin{array}{cccc}
 p_{00}(x) & & & \\
 p_{10}(x) & p_{11}(x) & & \\
 p_{20}(x) & p_{21}(x) & p_{22}(x) & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 p_{n0}(x) & p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \cdots & p_{nn}(x)
 \end{array}$$

Besser: Effiziente Auswertung in Datenvektor $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$:

$$\begin{array}{cccc}
 f_0 = f_0(x) & & & \\
 f_1 = f_1(x) & f_0(x) & & \\
 f_2 = f_2(x) & f_1(x) & f_0(x) & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 f_n = f_n(x) & f_{n-1}(x) & f_{n-2}(x) & \cdots & f_0(x)
 \end{array}$$

Implementierung als Matlab-Funktion.

INPUT:

```
x = (x(1),x(2),...,x(n)) % Stuetzstellen  
f = (f(1),f(2),...,f(n)) % Funktionswerte  
y % Auswertungsstelle
```

```
function p = neville(x,f,y)  
n = length(x);  
for k=2:n  
    z = y-x(k);  
    for i=k-1:-1:1  
        f(i) = f(i+1) + z/(x(i)-x(k))*(f(i)-f(i+1));  
    end;  
end;  
p = f(1);
```

Newton-Darstellung. Betrachte die **Newton-Basis**

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Dann gibt es *eindeutige* **Newton-Koeffizienten** $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i \omega_i(x) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Die obige Darstellung von p_n heißt **Newton-Darstellung**.

Beachte: Es gilt:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Berechnung der Newton-Koeffizienten.

Beachte: Aus den Interpolationsbedingungen folgt

$$p_n(x_0) = c_0 \stackrel{!}{=} f_0 \quad \Longrightarrow \quad c_0 = f_0$$

$$p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \stackrel{!}{=} f_1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$p_n(x_n) = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x_n - x_j)$$

$$= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \dots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

$$\stackrel{!}{=} f_n$$

mit

$$c_n = \left(f_n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \prod_{i=0}^{j-1} (x_n - x_i) \right) / \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

Beobachtungen.

- Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j + 1)$ Daten

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_j, f_j).$$

Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j] \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n$$

- Nimmt man ein Datum (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

mit

$$c_{n+1} = (f_{n+1} - p_n(x_{n+1})) / \prod_{j=0}^n (x_{n+1} - x_j).$$

□

Dividierte Differenzen.

Satz: *Die Koeffizienten*

$$c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j], \quad 0 \leq j \leq n,$$

des interpolierenden Newton-Polynoms

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \omega_i(x)$$

sind gegeben durch die **dividierten Differenzen**

$$f[x_j] = f_j$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Beweis: Mit Aitken-Lemma. □

Effiziente Berechnung der dividierten Differenzen.

Beispiel: Rekursives Berechnungsschema der dividierten Differenzen für $n = 3$.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Zum Beispiel:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Der Interpolationsfehler. Für das Interpolationspolynom gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - \left(p_{n+1}(x) - c_{n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right) \\ &= f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i).\end{aligned}$$

Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Folgerung: Für den **Interpolationsfehler** gilt die Abschätzung

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|.$$

Tschebyscheff-Knoten.

Beachte: Ein Term des Interpolationsfehlers ist das **Knotenpolynom**

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Optimierungsproblem: Bestimme die Knoten x_0, x_1, \dots, x_n , so dass

$$\max_{x_0, \dots, x_n \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

minimal auf $[a, b]$.

Lösung: Für das Intervall $[-1, 1]$ sind die **Tschebyscheff-Knoten** optimal.

$$x_j = \cos \left(\frac{2j+1}{2n+2} \pi \right) \quad j = 0, 1, \dots, n.$$



Polynominterpolation mit Matlab.

Die Matlab-Funktion `polyfit`

```
a = polyfit(x,f,n-1);
```

berechnet die Koeffizienten

```
a = (a(1),a(2),...,a(n));
```

des Interpolationspolynoms

$$p(x) = a(1)*x^{(n-1)} + a(2)*x^{(n-2)} + \dots + a(n-1)*x + a(n);$$

zu den Daten

```
x = (x(1),x(2),...,x(n));
```

```
f = (f(1),f(2),...,f(n));
```

Polynome kann man mit der Matlab-Funktion `polyval` auswerten.

9.3 Spline-Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Definition: Eine Funktion $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **kubischer Spline**, falls

- $S \in C^2([a, b])$, d.h. S ist zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$;
- S ist auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$, ein kubisches Polynom:

$$S(x) \Big|_{[x_{j-1}, x_j]} \equiv s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3.$$

□

Ziel: Interpolation der Daten (x_j, f_j) , $0 \leq j \leq n$, mit einem kubischen Spline S , so dass

$$S(x_j) = f(x_j), \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Interpolation mit kubischen Splines.

Beobachtungen:

- Ein kubischer Spline besitzt $4n$ Parameter, die wie folgt bestimmt werden.

- Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{und} \quad s_j(x_j) = f_j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n;$$

- Stetigkeit der Ableitung:

$$s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n - 1;$$

- Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s''_j(x_j) = s''_{j+1}(x_j) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n - 1;$$

- Dies sind insgesamt $4n - 2$ Gleichungen für $4n$ Parameter.
- **OBS!** Es fehlen noch zwei Bedingungen.

Zwei weitere Nebenbedingungen.

Definition: Ein kubischer Spline heißt

- **natürlicher Spline**, falls $S''(a) = S''(b) = 0$;
- **periodischer Spline**, falls $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$;
- **vollständiger Spline**, falls $S'(a) = f'(a)$ und $S'(b) = f'(b)$.

Beachte: Jede drei obigen Bedingungen liefert zwei weitere Gleichungen.

Satz: Unter allen interpolierenden C^2 -Funktionen minimiert der **natürliche kubische Spline** das Funktional

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 dx$$

□

Bemerkung: Das Funktional I mißt die Krümmung von y *approximativ*.

□

Berechnung des natürlichen kubischen Splines.

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$S(x)|_{[x_{j-1}, x_j]} \equiv s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3,$$

so gilt

$$a_j = f_{j-1}$$

$$b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6} h_j$$

$$c_j = \frac{M_{j-1}}{2}$$

$$d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ für $1 \leq j \leq n$.

Die **Momente** $M_j = S''(x_j)$ lösen ein lineares System mit *Tridiagonalmatrix*.

Herleitung des Splines mit Momentenmethode.

Der gewählte Ansatz

$$M_j := S''(x_j), \quad \text{für } 0 \leq j \leq n,$$

heißt **Momentenmethode**: $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} (x - x_{j-1}) \quad \text{mit } h_j = x_j - x_{j-1}$$

Zweifache Integration über Intervall $[x_{j-1}, x]$ liefert

$$s_j'(x) = B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j} (x - x_{j-1})^2$$

$$s_j(x) = A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2} (x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j} (x - x_{j-1})^3$$

mit Integrationskonstanten A_j, B_j .

Lösung der Bedingungsgleichungen.

Aus den Interpolationsbedingungen $s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}$ und $s_j(x_j) = f_j$ folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \quad \text{und} \quad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}), \quad (1)$$

mit der Stetigkeit von S' bei x_j , $1 \leq j < n$, d.h. $s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j)$ weiterhin

$$B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2}h_j = B_{j+1} \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-1. \quad (2)$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt schließlich $n-1$ lineare Gleichungen

$$h_j M_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})M_j + h_{j+1}M_{j+1} = 6 \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right),$$

$1 \leq j \leq n-1$, für die $n-1$ *unbekannten* Momente M_1, \dots, M_{n-1} .

Beachte: Die Momente $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ sind bereits *bekannt*.

Tridiagonalsystem für die Momente.

Das hergeleitete $(n - 1) \times (n - 1)$ lineare System hat die Form

$$\begin{bmatrix} 2k_1 & h_2 & & & \\ h_2 & 2k_2 & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2k_{n-2} & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2k_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, $k_j = h_j + h_{j+1}$, $1 \leq j \leq n - 1$, und

$$d_j = 6 \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n - 1,$$

sowie den Randwerten $M_0 = M_n = 0$.

Abschließende Bemerkungen zu Splines.

- Der natürliche kubische Spline kann *effizient* berechnet werden, nämlich durch Lösen des Tridiagonalsystems in nur $\mathcal{O}(n)$ Schritten.
- Eine Splineinterpolante vermeidet (unerwünschte) Oszillationen.
- Für $f \in C^4$ gilt die asymptotische Fehlerabschätzung

$$|f(x) - S(x)| = \mathcal{O}(h^4), \quad h \rightarrow 0$$

wobei $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$.

- Verwendet man einen *vollständigen* Spline mit Randbedingungen

$$S'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad S'(b) = f'(b)$$

so erhält man ein Tridiagonalsystem, das effizient gelöst werden kann.

- Verwendet man *periodische* Splines, so erhält man kein Tridiagonalsystem. Die Lösung kann dennoch effizient in $\mathcal{O}(n)$ Schritten berechnet werden.

Spline-Interpolation mit Matlab.

Die Matlab-Funktion `spline`

```
s = spline(x,f);
```

berechnet die Darstellung `s` einer kubischen Splinefunktion zu den Daten

```
x = (x(1),x(2),...,x(n));
```

```
f = (f(1),f(2),...,f(n));
```

Splines kann man mit der Matlab-Funktion `ppval` wie folgt auswerten.

```
t = linspace(-1,1,1000); % 1000 uniforme Knoten in [-1,1]
```

```
y = ppval(s,t); % Auswertung des Splines s
```

10 Integration

10.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: *Eine Menge der Form*

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung** (*Partition, Unterteilung*) des Intervalls $[a, b]$.

Die **Feinheit** der Zerlegung Z ist dabei definiert durch

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit \mathbf{Z} bzw. $\mathbf{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. \square

Riemannsche Summen.

Definition: Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \text{für } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung Z ,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z ,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Obersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z . □

Eigenschaften von Riemannschen Summen.

Beobachtung: Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für eine *feste* Zerlegung Z gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist Z_1 eine *feinere* Zerlegung als Z_2 , d.h. $Z_2 \subset Z_1$, dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

□

Das Riemannsches Integral.

Beobachtung: Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\int_a^b f(x) \, dx := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} \quad (\text{Oberintegral})$$

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heißt **(Riemann-)integrierbar** über $[a, b]$, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen, d.h.

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

das **(Riemann-)Integral** von $f(x)$ über $[a, b]$. □

Beispiele. Die konstante Funktion $f(x) \equiv c$ ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c (x_{i+1} - x_i) = c (b - a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x) dx = c (b - a).$$

- Für $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ gilt

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

somit

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Weitere Beispiele.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $\mathcal{U}_f(Z) = 0$, aber $\mathcal{O}_f(Z) = 1$.

Somit ist die Funktion f **nicht** integrierbar.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq c \\ 1 & : x = c \end{cases}$$

für $a \leq c \leq b$. Dann ist die Funktion f integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0,$$

denn es gilt

$$\mathcal{U}_f(Z) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \mathcal{O}_f(Z) \leq 2\|Z\|.$$

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

(a) Für $a \leq c \leq b$ ist f auf $[a, b]$ integrierbar, genau dann wenn f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ integrierbar ist, und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

(b) **Linearität:** Mit f und g ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, integrierbar:

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x) \right) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

(c) **Positivität:** Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

(d) **Monotonie:** Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Standardabschätzungen.

Satz: Sei f integrierbar über $[a, b]$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(b - a) \cdot \inf(f[a, b]) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b - a) \cdot \sup(f[a, b]).$$

und weiterhin

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq (b - a) \cdot \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

Falls $|f(x)|$ integrierbar ist, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Beweis: Für die Zerlegung $Z = \{a, b\}$ von $[a, b]$ folgt sofort

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) = \mathbf{U}_f(Z) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \mathbf{O}_f(Z) = \sup(f[a, b]) \cdot (b - a)$$

Weiterhin folgt wegen $\pm f(x) \leq |f(x)|$, für alle $x \in [a, b]$, die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq \mathbf{O}_{|f|}(Z) = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \cdot (b - a).$$



Bemerkung: Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx$$

liefert insbesondere die Positivität des Integrals.



Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c .

Wir definieren daher

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

sowie

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

- Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt

$$R_f(Z_m) \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

für alle Zerlegungsfolgen $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a, b]$ mit $\|Z_m\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. \square

10.2 Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (**Riemannsches Kriterium**)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:

(a) $f(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$0 \leq O_f(Z) - \int_a^b f(x) \, dx < \varepsilon/2,$$

$$0 \leq \int_{\bar{a}}^b f(x) \, dx - U_f(Z) < \varepsilon/2.$$

(a) \Rightarrow (b): Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.

(b) \Rightarrow (a): Die Integrierbarkeit von f folgt direkt aus (b) mit

$$0 \leq \int_a^b f(x) \, dx - \int_{\bar{a}}^b f(x) \, dx \leq O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Monotone Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine beschränkte monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Für eine uniforme Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b - a), \quad 0 \leq j \leq n,$$

und für f monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j))(x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes n . Nach dem Riemannsches Kriterium ist f integrierbar.

Analog zeigt man die Integrierbarkeit für f monoton fallend. ■

Stetige Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine beschränkte stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: f ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit Feinheit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist f nach dem Riemannsches Kriterium integrierbar. ■

Satz: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare beschränkte Funktionen. Dann gilt:

(a) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.

(b) Gilt $g(x) \geq C > 0$, so ist der Quotient $f(x)/g(x)$ integrierbar über $[a, b]$.

Beweis: (a): Für eine feste Zerlegung $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned}
 s_j &:= \sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\
 &= \sup_{x,y} (f(x)g(x) - f(y)g(y)) \\
 &= \sup_{x,y} (f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)) \\
 &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y} (g(x) - g(y)) + \|g\|_\infty \sup_{x,y} (f(x) - f(y))
 \end{aligned}$$

und somit

$$O_{f \cdot g} - U_{f \cdot g} \leq \|f\|_\infty (O_g - U_g) + \|g\|_\infty (O_f - U_f),$$

womit die Integrierbarkeit von $f \cdot g$ mit dem Riemannsches Kriterium folgt. ■

Beweis von (b): Für eine feste Zerlegung $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup \left(\frac{1}{g} \right) [x_j, x_{j+1}] - \inf \left(\frac{1}{g} \right) [x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right) \\ &= \sup_{x,y} \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \\ &\leq \frac{1}{C^2} \cdot \sup_{x,y} (g(y) - g(x)) \end{aligned}$$

und somit

$$O_{1/g} - U_{1/g} \leq \frac{1}{C^2} \cdot (O_g - U_g),$$

womit die Integrierbarkeit von $1/g$ mit dem Riemannsches Kriterium folgt.
Insgesamt folgt mit (a) die Integrierbarkeit von f/g . ■

Spezialfälle integrierbarer Funktionen.

Satz: Sei f integrierbar über $[a, b]$. Dann sind folgende Funktionen integrierbar.

$$|f|(x) := |f(x)|$$

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{für } f(x) < 0. \end{cases}$$

Beweis: Aus

$$\sup_{x,y} (|f(x)| - |f(y)|) \leq \sup_{x,y} (f(x) - f(y))$$

folgt die Integrierbarkeit der Funktion $|f|$. Die Integrierbarkeit von f^+ und f^- folgt aus den Relationen $f^+ = (|f| + f)/2$ und $f^- = (|f| - f)/2$. ■

10.3 Der Hauptsatz und Anwendungen

Definition: Seien Funktionen $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Dann heißt $F(x)$ **Stammfunktion** von $f(x)$.

Bemerkung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion

$$F_1(x) - F_2(x)$$

konstant.



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

(a) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

(b) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Beweis von (a): Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x + h \in [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \sup\{|f(t) - f(x)| : |t - x| \leq h \text{ und } t \in [a, b]\} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[a, b]$. ■

Beweis von (b): Mit Teil (a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

für eine Konstante C . Daraus folgt

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C$$

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$



Bemerkungen.

- Teil (a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{x \rightarrow x^-} f(x) \quad \text{und} \quad F'(x^+) = \lim_{x \rightarrow x^+} f(x).$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man **das unbestimmte Integral** von $f(x)$ und man schreibt

$$F = \int f(x) \, dx$$

Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

□

Beispiele. Wir bezeichnen mit C stets die **Integrationskonstante**.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\log|\cos(x)| + C \quad \text{für } \cos(x) \neq 0$$

$$\int \cot(x) dx = \log|\sin(x)| + C \quad \text{für } \sin(x) \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C \quad \text{für } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Weitere Beispiele.

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C \quad \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad \text{für } |x| > 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad \text{für } |x| \neq 1.$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad \text{für } a \neq 0.$$

Noch mehr Beispiele.

$$\int b^x dx = \frac{1}{\log(b)} b^x + C \quad \text{für } b > 0, b \neq 1.$$

$$\int \log(x) dx = x(\log(x) - 1) + C \quad \text{für } x > 0.$$

$$\int \log_b(x) dx = \frac{x}{\log(b)} (\log(x) - 1) + C \quad \text{für } b > 0, x > 0.$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \tanh(x) dx = \log(\cosh(x)) + C$$

$$\int \coth(x) dx = \log(|\sinh(x)|) + C \quad \text{für } x \neq 0.$$

Wichtige Integrationsregeln.

Satz (Linearität): Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Satz (Partielle Integration): Sind $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Beweis: folgt direkt aus Produktregel der Differentiation: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. ■

Die Substitutionsregel.

Satz: Ist $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt

$$\int f(h(t))h'(t) dt = F(h(t)).$$

Für bestimmte Integrale erhält man somit

$$\int_a^b f(h(t))h'(t) dt = F(h(b)) - F(h(a)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx.$$

Beweis: folgt direkt aus Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t).$$



Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3) dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \log(x) dx &= \int 1 \cdot \log(x) dx \\ &= x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log(x) - 1) + C \end{aligned}$$

□

Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x) \, dx &= \int \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx \\ &= \sin(x)(-\cos(x)) + \int \cos^2(x) \, dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) \, dx\end{aligned}$$

$$\implies 2 \int \sin^2(x) \, dx = -\sin(x) \cos(x) + x + C$$

$$\implies \int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C$$

□

Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a \cos(t)$ in

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx = \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2(t)} (-a \sin(t)) dt,$$

denn

$$dx = -a \sin(t) dt \quad h(0) = a \quad \text{und} \quad h(\pi) = -a.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2(t)} (-a \sin(t)) dt \\ &= a \int_0^{\pi} \sin^2(t) dt \\ &= \frac{a}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t 2t dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t 2t dt \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

- Nicht jedes Integral lässt sich explizit “lösen”, d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt “einfache” Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele:

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (\text{Integralsinus})$$

$$\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{Fehlerfunktion})$$

$$E(x, k) := \int_0^x (1 - k^2 \sin^2 t)^{\pm \frac{1}{2}} dt \quad (\text{Elliptische Integrale})$$

□

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx.$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a, b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a, b]) \cdot p(x).$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x)p(x) dx \leq \max(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

□

Der Satz von Taylor. Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 durch n -fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x (x-t)^0 f'(t) dt \\
 &= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)^1 f''(t) dt \\
 &= (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

10.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration **rationaler Funktionen**

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k.$$

Methode: **Partialbruch-Zerlegung** von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit **Polynomdivision**, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
 - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j ;
 - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung.

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

Unbekannte **Parameter**, die bestimmt werden müssen:

$$\alpha_{j\ell}, \quad j = 1, \dots, n_1, \ell = 1, \dots, k_j;$$

$$\gamma_{j\ell}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, \ell = 1, \dots, k_j;$$

$$\delta_{j\ell}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, \ell = 1, \dots, k_j.$$

Diese Parameter werden durch **Koeffizientenvergleich** berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel. Betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

• Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2 + 1} \\ \Rightarrow 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

• Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

• Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

• Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

Typ I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^s c_k x^k dx = \sum_{k=0}^s \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Typ II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2 + 1)^\ell} dx \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_\ell = \frac{1}{2(1 - \ell)} \left[(3 - 2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} \right] \quad \text{für } \ell = 2, 3, \dots$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^\ell} dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{u^{\ell-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^\ell} dx = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1)^\ell} dx + I_\ell \\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2 + 1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)} \cdot I_{\ell-1} + I_\ell\end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)} \left[(3 - 2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} \right] \quad \text{für } \ell = 2, 3, \dots \quad \blacksquare$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx + d}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} dx = \frac{c}{2} \int \frac{2(x - a)}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} dx + (d + ca) \int \frac{dx}{((x - a)^2 + b^2)^\ell}$$

• Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x - a)}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} dx = \int \frac{du}{u^\ell} \quad \text{mit } u = (x - a)^2 + b^2.$$

$$= \begin{cases} \log(|(x - a)^2 + b^2|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1 - \ell} \cdot \frac{1}{((x - a)^2 + b^2)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

• Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^\ell} \quad \text{mit } t = \frac{x - a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \int R(x) \, dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \arctan(x) + C \end{aligned}$$



Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt$$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

und somit durch Substitution in

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt$$

□

10.5 Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne **uneigentliche Integrale**, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) \, dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{wobei } f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \text{oder} \quad f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls f über jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subset D$ integrierbar ist. \square

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $[a, \infty)$ bzw. $(-\infty, b]$ bzw. $(-\infty, \infty)$, so definiert man

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^b f(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx := \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^\infty f(x) \, dx \quad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

 \square

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b) , so definiert man

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x) \, dx$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x) \, dx$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad \text{für } c \in (a, b).$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\ \log(|x|) + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. ■

Ein weiteres Beispiel. Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx = -\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx,$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_0^y xe^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{y^2} e^{-u} du && \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-y^2}) \rightarrow \frac{1}{2} && \text{für } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx = 1$$



Konvergenzkriterien.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt:

(a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) \, dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C > a : \forall z_1, z_2 > C : \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

(b) Ist das uneigentliche Integral **absolut konvergent**, d.h.

$$\int_a^\infty |f(x)| \, dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) \, dx.$$

□

Majorantenkriterium.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt:

(c)

$$\forall x : |f(x)| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x) \, dx \quad \text{konvergent}$$

$$\implies \int_a^\infty f(x) \, dx \quad \text{absolut konvergent}$$

(d) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x) \, dx \quad \text{divergent}$$

$$\implies \int_a^\infty f(x) \, dx \quad \text{divergent.}$$

□

Beispiel: Das Dirichlet-Integral

Betrachte das **Dirichlet-Integral**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Das Dirichlet-Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

und somit

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{y_1} \rightarrow 0 \quad \text{für } y_1 \rightarrow \infty.$$

□

Bemerkungen:

- Das Dirichlet-Integral ist **nicht** absolut konvergent;
- Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$.

□

Beispiel: Das Exponentialintegral

- Betrachte das **Exponentialintegral**

$$\text{Ei}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \leq C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \frac{|te^t|}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt$$

folgt die **absolute Konvergenz** des Exponentialintegrals $\text{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium. ■

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die **Gamma-Funktion** $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0.$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq t^{x-1} \quad \text{für } 0 < t \leq 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x} (1 - \varepsilon^x) \rightarrow \frac{1}{x} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$|e^{-t} t^{x-1}| = \left| \frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2} \right| \leq \frac{C}{t^2} \quad \text{für } 1 \leq t \leq \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Weitere Bemerkungen zur Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x) \quad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(1) = 1.$$



Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$



10.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} f(x, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.

Sei $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, so dass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a, b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x, y) dy.$$

Fragen:

- Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x, y)$ stetig ist?
- Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x, y)$ nach x differenzierbar?

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x, y) \, dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I .

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x, y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a, b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon \quad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a, b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x_0, y)) \, dy \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x_0, y)| \, dy < \varepsilon(b-a).$$

Somit ist F stetig in x_0 . Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig. ■

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$ und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall I stetig differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) dy \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) dy.$$

Somit ist F differenzierbar in x_0 .

Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar. ■

Zwei Beispiele. Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^{\pi} \frac{\sin(tx)}{t} dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \int_1^{\pi} \cos(tx) dt.$$

Beispiel 2: Die **Bessel-Funktion**

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t) - nt) dt, \quad \text{für } n \in \mathbb{Z},$$

$$J'_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot \sin(x \sin(t) - nt) dt,$$

$$J''_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t) \cdot \cos(x \sin(t) - nt) dt.$$

Bemerkung: Die Bessel-Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der **Besselschen Differentialgleichung**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Übung (mit partieller Integration). □

Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^\infty f(x, y) dy \quad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Definition: *Das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x, y) dy \quad \text{für } x \in I$$

heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt mit

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \text{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

□

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das **Majorantenkriterium**, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x, y) \, dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x, y)$ gibt mit

$$|f(x, y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(y) \, dy < \infty \quad \text{für alle } x, y \in I.$$

Beweis:

$$\left| \int_a^\infty f(x, y) \, dy \right| \leq \int_a^\infty |f(x, y)| \, dy \leq \int_a^\infty g(y) \, dy < \infty.$$



Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: Sei $f(x, y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale

$$F(x) := \int_a^\infty f(x, y) dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I gleichmäßig konvergent. Dann ist $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen. □

Beispiel: Die Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \log(t) dt.$$

11 Anwendungen der Integralrechnung

11.1 Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x -Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi(f(x))^2 \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden **Rotationskörper** die Volumenformel

$$V_{\text{rot}} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein. □

Beispiel. Durch die Rotation der **Ellipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a, b > 0$$

um die x -Achse erhält man ein **Rotationsellipsoid** mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{\text{rot}} &= \pi \int_{-a}^a \left[b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{\text{rot}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$. □

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

□

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2.$$

□

11.2 Kurven und Bogenlänge

Definition: Sei $c = (c_1, \dots, c_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

- Dann wird c als **Kurve** im \mathbb{R}^n bezeichnet; $c(a)$ heißt **Anfangspunkt**, $c(b)$ heißt **Endpunkt** von c . c heißt **geschlossene Kurve**, falls $c(a) = c(b)$.
- Falls $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion, d.h. jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ ist stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine **C^1 -Kurve**.
- $c(t)$ heißt **stückweise C^1 -Kurve**, falls es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

gibt, so dass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine C^1 -Funktion ist.

- Die Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\frac{d}{dt}c(t) := \dot{c}(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))^T \neq 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

□

Beispiele:

- Die Kurve

$$c(t) := (\cos(t), \sin(t))^T \quad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen **Kreis** im \mathbb{R}^2 .

- Die Kurve

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T$$

beschreibt eine **Zykloide**.

Wegen

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos(t)), r \sin(t))^T$$

ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.

- Die Kurve

$$c(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine **Schraubenlinie (Helix)** mit Radius r und **Ganghöhe** h .

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \quad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinne wie die Kurve c .

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine **Umparametrisierung (Parameterwechsel)**. Die Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer C^1 -Kurve werden nur C^1 -Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ beschreibt eine Kurve mit

$$c(x) := (x, f(x))^T \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

$$\text{bzw. } c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

eine untere Schranke für die **Bogenlänge** der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und in diesem Fall ist

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} L(Z)$$

die **Länge** der Kurve c . □

Berechnung der Bogenlänge einer C^1 -Kurve.

Satz: Jede C^1 -Kurve ist rektifizierbar, und es gilt

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Beweisidee: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, so dass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c'_k(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (c'_k(\tau_{k_j}))^2 \cdot (t_{j+1} - t_j)} \right). \quad \blacksquare$$

Beispiel.

Berechnen die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= (r(1 - \cos(t)), r \sin(t))^T \\ \|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = 2r \sin(t/2) \\ L(c) &= 2r \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8r\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1 -Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = L(c)$$

□

Die Bogenlängenfunktion einer C^1 -Kurve.

Definition: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve.

- Die Funktion

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

heißt die **Bogenlängenfunktion** von c .

- Ist c glatt, so ist $S : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ ein C^1 -Parameterwechsel.
- Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein C^1 -Parameterwechsel.
- Die Parametrisierung

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)) \quad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

von c nennt man die **Parametrisierung nach der Bogenlänge**. □

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ein **Einheitsvektor**, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Weiterhin ist $\tilde{c}'(s)$ der **Einheitstangentenvektor** von c .

- Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

d.h. der **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}'(s)$.

□

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: Sei $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ die Bogenlängenparametrisierung der Kurve c .

- Dann bezeichnet man den Vektor

$$\mathfrak{n}(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den **Hauptnormalenvektor** von c .

- Die Funktion

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\| \quad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

nennt man die **Krümmung** von c . □

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\tilde{c}(s) = (\cos(s), \sin(s)) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$\mathfrak{n}(s) = \tilde{c}''(s) = -(\cos(s), \sin(s))$$

$$\kappa(s) \equiv 1$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte Graph von $y = y(x)$ als Kurve im \mathbb{R}^2 , d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$. Dann:

$$c'(x) = (1, y'(x))^T \quad ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(\sqrt{1 + (y'(x))^2})^3}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$c'(x) = (1, y'(x), z'(x))^T$$
$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx \quad (\text{Bogenlängenelement})$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx$$

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)^3}}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

- Für die **Polarkoordinaten** $r \equiv r(t)$, $\varphi \equiv \varphi(t)$ im \mathbb{R}^2 gilt:

$$c(t) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt.$$

- Für die **Kugelkoordinaten** $r \equiv r(t)$, $\varphi \equiv \varphi(t)$, $\psi \equiv \psi(t)$ im \mathbb{R}^3 gilt:

$$c(t) = (r \cos(\varphi) \cos(\psi), r \sin(\varphi) \cos(\psi), r \sin(\psi))^T \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2(\psi) + r^2 \dot{\psi}^2} dt.$$

□

Beispiel: Kardioiden in Polarkoordinaten.

Betrachte die **Kardioiden** (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos(\varphi)) \quad \text{für } a > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardioiden gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + a^2(1 + \cos(\varphi))^2} \, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| \, d\varphi = 8a$$

□

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: Für die von einer C^1 -Kurve $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2} \|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad \text{für } 0 \leq i \leq m-1.$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright F(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \right) \Delta t_i \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die **Archimedische Spirale** ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$x = a \varphi \cos(\varphi), \quad y = a \varphi \sin(\varphi), \quad \text{für } a > 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs (Bogenlänge) und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2 \varphi^2} \, d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \log \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r^2 \dot{\varphi}$$

gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2 \, d\varphi \approx 1.292a^2.$$

□

11.3 Kurvenintegrale

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine stetige Funktion und $c : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann wird das **Kurvenintegral (Linienintegral)** von $f(x)$ längs c definiert durch

$$\int_c f(x) \, ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt.$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve c schreibt man auch

$$\oint_c f(s) \, ds.$$

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.*

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}\int_{c \circ h} f(x) \, ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau) \, d\tau \\ &= \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt \\ &= \int_c f(x) \, ds\end{aligned}$$



Beispiel. Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine C^1 -Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ .

- Für die **Gesamtmasse** des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x) \, ds := \int_a^b \rho(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt.$$

- Der **Schwerpunkt** des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x \, ds}{\int_c \rho(x) \, ds}$$

- Das **Trägheitsmoment** des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x) \, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist. □

12 Fourier-Analysis

12.1 Grundlegende Begriffe

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) heißt **periodisch mit der Periode T (oder T -periodisch)**, falls

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

Ziel: Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine **Fourier-Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \dots$

Bemerkungen.

- Ist T eine Periode von f , so auch kT , $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode von f .
- Sind T_1 und T_2 Perioden von f , so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \quad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Perioden von f .

- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f , so ist die Menge der Perioden von f gegeben durch kT , $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion f besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind f und g T -periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T -periodisch.
- Ist f T -periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Periodische Fortsetzungen.

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T -periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt fortsetzen.

- **Direkte Fortsetzung.**

$$f(t) := g(t - kT) \quad \text{für } kT \leq t < (k + 1)T$$

- **Gerade Fortsetzung.** Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben. Dann setze

$$f(t) := g(t - kT) \quad \text{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right)T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right)T,$$

wobei g zunächst an der y -Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

- **Ungerade Fortsetzung.** Wie oben, aber Spiegelung um Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

heißt **Fourier-Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**). Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

der Fourier-Reihe $f(t)$ heißen **trigonometrische Polynome** vom Grad n .

□

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die **Eulersche Formel**

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt

$$a_0 = 2\gamma_0, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen.

Satz: Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, bilden ein **Orthonormalsystem** bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt.$$

Beweis: Einerseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = 1,$$

andererseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\ell-k)\omega t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{i(\ell-k)\omega} e^{i(\ell-k)\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq \ell$. ■

Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Satz: *Konvergiert die Fourier-Reihe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion f , so ist f stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Da f_n **stetig** und gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig.

Weiterhin:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-il\omega t} dt &= \int_0^T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} e^{-il\omega t} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-il\omega t} dt = \gamma_l \cdot T. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Orthonormalität und Fourier-Koeffizienten in \mathbb{R} .

$$\int_0^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq \ell \\ T/2 & : k = \ell \neq 0 \\ T & : k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq \ell \\ T/2 & : k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad \text{für } k > 0$$

12.2 Fourier-Reihen

Definition:

- Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen auf $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von $f(t)$ bzw. $f'(t)$ existieren.
- Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ werden die **Fourier-Koeffizienten** von $f(t)$ definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die **Kreisfrequenz**. □

Bemerkung: Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{für } k \geq 0$$
$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad \text{für } k > 0$$

Definition: Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier-Reihe** von $f(t)$. □

Bemerkung: Bei der obigen Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ zu einer T -periodischen Funktion. Notation:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T -periodische Funktion. Dann gilt:

$$f(t) \text{ gerade} \implies a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \implies a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

Beweis: Beispielsweise gilt für f gerade (argumentiere für f ungerade analog):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{-T} f(-\tau) \sin(k\omega \tau) d\tau \\ &= -\frac{2}{T} \int_{-T}^0 f(\tau) \sin(k\omega \tau) d\tau = -\frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \sin(k\omega \tau) d\tau = -b_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos(k\omega t) dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(-\tau) \cos(k\omega \tau) dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right] = \frac{4}{T} \left[\int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right]. \end{aligned}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die **Sägezahnfunktion**

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{ für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{ für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$)

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt) \, dt = \frac{1}{k}$$

und damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$S(t) \sim \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die **Rechteckschwingung**

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0, t = \pi \text{ oder } t = 2\pi \\ 1 & : \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$a_k = 0$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \begin{cases} 0 & : \text{für } k \text{ gerade;} \\ \frac{4}{k\pi} & : \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right).$$

Noch ein Beispiel.

Betrachte $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit direkter 2π -periodischer Fortsetzung.

Die Fortsetzung ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : \text{ für } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : \text{ für } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos(t)}{1^2} + \frac{4 \cos(2t)}{2^2} \mp \dots$$

□

Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, T -periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- **Linearität:**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha \gamma_k + \beta \delta_k) e^{ik\omega t}$$

- **Konjugation:**

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\gamma_{-k}} e^{ik\omega t}$$

- **Zeitumkehr:**

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- **Streckung:**

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \quad \text{für } c > 0$$

- **Verschiebung:**

$$f(t + a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\gamma_k e^{ik\omega a}) e^{ik\omega t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Noch mehr Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- **Ableitung:** Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f'(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k) e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega) [b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)] \end{aligned}$$

- **Integration:** Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t) dt = 0$, so folgt

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \sim -\frac{1}{T} \int_0^T \tau f(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right]$$

Konvergenzsatz.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier-Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)] \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz der Fourier-Reihe gleichmäßig.

Bemerkung:

Die Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier-Reihe nicht aus. \square

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2 \cos(t) + 2 \cos(2t) \dots + 2 \cos(nt) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^t \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin(\tau/2)} d\tau = (t - \pi) + 2 \sin(t) + 2 \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + 2 \frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \int_{\pi}^t \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{2 \sin(\tau/2)} d\tau \\ &= \frac{-\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1) \sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1} \int_{\pi}^t \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin(\tau/2)} \right) d\tau \\ &= \frac{-\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1) \sin(t/2)} + \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \xi \right]}{(2n+1)} \left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1 \right) \quad \text{für } \xi \in [\pi, t], \end{aligned}$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1) \sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

□

Approximation im quadratischen Mittel.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe von f . Für den linearen Raum

$$T_n := \text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n\omega t) \right\} \subset C(\mathbb{R})$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \quad \text{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h. S_n ist **Bestapproximation** an f aus T_n bezüglich $\|\cdot\|$.

Beweis: Die Funktionen

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_k(t) = \cos(k\omega t), \quad \psi_k(t) = \sin(k\omega t) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

bilden eine **Orthonormalbasis** des linearen Teilraums $T_n \subset C(\mathbb{R})$.

Dann ist die **Bestapproximation** $s^* \in T_n$ aus T_n an $f \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch die **orthogonale Projektion** von f auf T_n :

$$\begin{aligned} s^*(t) &= \langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n [\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) + \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t)] \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n [a_k \varphi_k(t) + b_k \psi_k(t)] \\ &= S_n(t), \end{aligned}$$

wobei $a_0 = \sqrt{2} \langle f, \varphi_0 \rangle$, $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ und $b_k = \langle f, \psi_k \rangle$ für $k = 1, 2, \dots, n$. ■

Die Besselsche Ungleichung.

Satz: Es gilt die **Besselsche Ungleichung** $\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n [|a_k|^2 + |b_k|^2] \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - S_n\|^2 = \langle f - S_n, f - S_n \rangle = \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle f, S_n \rangle + \|S_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \left\langle f, \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \varphi_k + b_k \psi_k) \right\rangle + \|S_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\left\langle f, \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0 \right\rangle + \sum_{k=1}^n [a_k \langle f, \varphi_k \rangle + b_k \langle f, \psi_k \rangle] \right) + \|S_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2 \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n [|a_k|^2 + |b_k|^2] \right) + \|S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2 \end{aligned}$$

■

Das Riemannsches Lemma.

Folgerung: *Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

*und damit gilt das **Riemannsches Lemma***

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

□

Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz: Ist eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) stückweise $(m + 1)$ -fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)}$$

stetig auf \mathbb{R} , so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Fazit: Je glatter f , desto schneller konvergiert die Fourier-Reihe F_f gegen f .

Beweis: Reicht zu zeigen für $m = 0$. Sei $f(t)$ stückweise stetig differenzierbar mit Unstetigkeitsstellen

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T.$$

Dann bekommt man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} T \cdot \gamma_k &= \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{ik\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[f(t) e^{-ik\omega t} \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) e^{-ik\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &\leq \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{k} \left[\frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[|f(t_{j+1}^-)| + |f(t_j^+)| \right] + \frac{1}{\omega} \int_0^T |f'(t)| dt \right] \\ &= \frac{C}{|k|}, \quad \text{mit } C \equiv C(f). \end{aligned}$$



Die Parsevalsche Gleichung.

Bemerkung. Für $n \rightarrow \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die **Parsevalsche Gleichung** $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

denn die Fourier-Reihe **konvergiert im quadratischen Mittel** gegen f , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Beispiel: Für die Rechteckschwingung $R(t)$ gilt $\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = 2$. Da $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2.$$

□

Eindeutigkeitssatz.

Satz: Seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei T -periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) && \text{für alle } t \in [0, T]; \\ g(t) &= \frac{1}{2} (g(t^-) + g(t^+)) && \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Weiterhin besitzen f und g dieselben Fourier-Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt &= \int_0^T g(t) \cos(k\omega t) dt && \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0; \\ \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt &= \int_0^T g(t) \sin(k\omega t) dt && \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann stimmen f und g auf ganz \mathbb{R} überein, d.h. es gilt $f \equiv g$. □

13 Numerische Quadratur

Ausgangssituation: Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

mit einem *numerischen* Algorithmus.

Verwenden **Numerische Quadratur (Quadraturformel)** der Form

$$I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit

- **Knoten** $x_i \in [a, b]$, für $i = 0, 1, \dots, n$;
- **Gewichten** g_i für $i = 0, 1, \dots, n$.

13.1 Newton-Cotes Formeln

Grundidee: Verwende Interpolationspolynom p_n zu Daten

$$(x_i, f(x_i)) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

und integriere die Interpolante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{mit } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ergebnis: Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Konstruktion der Newton-Cotes Formeln.

Vereinfachung: Verwenden äquidistante Knoten

$$x_i = a + ih, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \text{wobei } h = (b - a)/n.$$

Ergebnis: **Newton-Cotes-Quadraturformel**

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = (b - a) \sum_{i=0}^n \alpha_{in} f(x_i)$$

mit Gewichten

$$\alpha_{in} = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{s - j}{i - j} ds \quad \text{für } 0 \leq i \leq n,$$

unter Verwendung der Substitution $s = (x - a)/h$. □

Die Trapezregel.

Wähle $n = 1$ und somit $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x - a}{b - a} \cdot f(b) + \frac{b - x}{b - a} \cdot f(a)$$

und somit bekommt man die beiden Gewichte

$$\alpha_{01} = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Daraus folgt die **Trapezregel**

$$I[f] \approx I_1[f] = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Die Simpsonregel.

Wähle $n = 2$ und somit

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$$

Damit bekommt man die drei Gewichte

$$\alpha_{02} = \frac{1}{4} \int_0^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{4} \int_0^2 x(x-1) dx = \frac{1}{6}$$

Daraus folgt die **Simpsonregel**

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right).$$

Zwei weitere Newton-Cotes-Formeln.

- 3/8-Regel.

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{(b-a)}{3}\right) + f(b) \right)$$

- Milne-Regel.

$$I_4[f] = \frac{b-a}{90} \left[7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + 32f\left(a + 3\frac{(b-a)}{4}\right) + 7f(b) \right]$$

Übersicht: Gewichte der Newton-Cotes Formeln.

n	α_{in}					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson-Regel
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		3/8-Regel
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne-Regel

Satz:

Die **Newton-Cotes-Formel** $I_n[f]$ integriert Polynome vom Grad $\leq n$ exakt.

Beweis: Das Interpolationspolynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ zu den $n + 1$ Daten $(x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n$, rekonstruiert $f \in \mathcal{P}_n$ exakt, d.h. $f \equiv p_n$, und daher gilt

$$I[f] = I[p_n] = \int_a^b p_n(x) dx = I_n[f] \quad \text{für alle } f \in \mathcal{P}_n. \quad \blacksquare$$

Quadraturfehler der Newton-Cotes Formeln.

$R_n[f] := I_n[f] - I[f]$ heißt **Quadraturfehler** der Quadraturformel $I_n(f)$.

Erinnerung: Darstellung für den Interpolationsfehler:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Beispiel: Für den Quadraturfehler der Trapezregel ($n = 1$) gilt

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \int_a^b (p_1(x) - f(x)) dx = - \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x-a)(x-b) dx \\ &= - \frac{f^{(2)}(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{1}{12} f^{(2)}(\tilde{\xi}) (b-a)^3 \end{aligned}$$

und somit gilt für $h = b - a$ die Fehlerabschätzung

$$|R_1[f]| = |I_1[f] - I[f]| \leq \frac{1}{12} \|f^{(2)}\|_{\infty} \cdot h^3.$$

Quadraturfehler der Newton-Cotes Formeln.

n	$R_n[f]$	
1	$h^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)$	Trapezregel
2	$h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$	Simpson-Regel
3	$h^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$	3/8-Regel
4	$h^7 \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi)$	Milne-Regel

wobei jeweils

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Zusammengesetzte Newton-Cotes Formeln.

Ziel: Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$t_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}.$$

Verwende auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ Quadraturformel der Ordnung n .

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \left(f(t_i) + f(t_{i+1}) \right) \\ &= h \left(\frac{f(a)}{2} + f(a + h) + \dots + f(b - h) + \frac{f(b)}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Fehlerabschätzung zusammengesetzte Trapezregel.

Satz: Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \|f^{(2)}\|_\infty.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - T(h) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) \, dx - I_1^{(j)}[f] \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) \, dx - I_1^{(j)}[f] \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^3}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\ &\leq \frac{N}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty = \frac{h^2}{12} (b - a) \|f^{(2)}\|_\infty \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Simpson-Regel.

Wende die Simpson-Regel auf die Teilintervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ an, mit Knoten

$$t_{2i}, \quad t_{2i+1}, \quad t_{2i+2} \quad \text{für } 0 \leq i \leq N/2 - 1,$$

wobei N gerade. Dann bekommt man die **zusammengesetzte Simpson-Regel**

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} (f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 4f(b-h) + f(b)) \end{aligned}$$

Satz: Für die zusammengesetzte Simpson-Regel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - S(h) \right| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \|f^{(4)}\|_\infty$$

Beweis: analog wie bei der zusammengesetzten Trapezregel. □

13.2 Gauß-Quadratur

Erinnerung: Mit der Newton-Cotes Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

werden Polynome vom Grad n **exakt** integriert.

Dabei sind die Knoten x_i , $0 \leq i \leq n$, **äquidistant** auf $[a, b]$ verteilt.

Grundidee der Gauß-Quadratur: Variiere die Knoten x_0, \dots, x_n .

Grundidee der Gauß-Quadratur.

Ziel:

Variiere Knoten, um Polynome möglichst hohen Grades exakt zu integrieren.

Genauer:

Approximiere für eine feste positive **Gewichtsfunktion** $w : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$

Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b f(x)w(x) dx$$

durch Quadratur der Form

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)w_i$$

mit einer **speziellen** Wahl von Stützstellen x_i und **positiven** Gewichten w_i .

Ergebnis: **Gaußsche Quadraturformeln** mit $(n + 1)$ Knoten integrieren

Polynome vom Grad $2n + 1$ exakt. □

Beispiel: Gauß-Tschebyscheff-Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
- **Knoten:** Nullstellen

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

des $(n+1)$ -ten **Tschebyscheff-Polynoms**

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos(x)) \in \mathcal{P}_{n+1} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

- **Konstante Gewichte:** $w_i \equiv \pi/(n+1)$.
- **Gauß-Tschebyscheff Quadratur:**

$$I_n[f] = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) \approx I_w[f] = \int_{-1}^1 f(x)w(x) dx.$$

Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome.

Satz: Die Tschebyscheff-Polynome T_0, \dots, T_n bilden eine orthogonale Basis des Polynomraums \mathcal{P}_n bezüglich des gewichteten Skalarprodukts

$$(f, g)_w := \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx.$$

Genauer gilt:

$$(T_k, T_j)_w = \begin{cases} \pi & \text{für } k = j = 0 \\ \pi/2 & \text{für } k = j > 0 \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

Beweis: Übung (mit Substitution $t = \cos(x)$) □

Satz: Für die Tschebyscheff-Polynome gilt die Rekursionsformel

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{für } k \geq 1,$$

wobei $T_0 \equiv 1$ und $T_1(x) = x$. □

Legendre-Polynome.

Satz: Für die Gewichtsfunktion $w \equiv 1$ auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ sind die Legendre-Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \in \mathcal{P}_n$$

Orthogonalpolynome. Genauer gilt:

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{für } n = m \geq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$



Beweis: Übung (per Induktion). □

Satz: Für die Legendre-Polynome gilt die Rekursionsformel

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1,$$

wobei $L_0 \equiv 1$ und $L_1(x) = x$. □

Weitere Eigenschaften der Legendre-Polynome.

Die ersten Legendre-Polynome sind gegeben durch

$$L_0(x) \equiv 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

Deren jeweilige Nullstellen sind gegeben durch

$$L_1 : x_0 = 0$$

$$L_2 : x_{0/1} = \pm\sqrt{1/3}$$

$$L_3 : x_0 = 0, x_{1/2} = \pm\sqrt{3/5}$$

$$L_4 : x_{0/1/2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{\frac{24}{5}}}$$

Zur Konstruktion der Gauß-Legendre-Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) \equiv 1$.
- **Knoten:** $n + 1$ Nullstellen x_0, \dots, x_n des Legendre-Polynoms $L_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$.
- **Gewichte:** Mit festen Knoten x_0, \dots, x_n zu berechnen aus

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx > 0.$$

- **Gauß-Legendre Quadratur:**

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx I[f] = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Weitere Spezialfälle der Gauß-Quadratur.

Name	Intervall	Gewicht
Gauß-Legendre	$[-1, 1]$	$w \equiv 1$
Gauß-Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
Gauß-Jacobi	$[-1, 1]$	$w(x) = (1-x)(1+x)$
Gauß-Laguerre	$[0, \infty)$	$w(x) = e^{-x}$
Gauß-Hermite	$(-\infty, \infty)$	$w(x) = e^{-x^2}$

Zur Konstruktion von Gauß-Quadraturformeln.

- Konstruiere zu festem Intervall $[a, b]$ und Gewichtsfunktion w eine Folge

$$p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$$

von Orthogonalpolynomen, wobei $p_k \in \mathcal{P}_k$ und $(p_k, p_j)_w = \delta_{jk}$.

- Verwende Nullstellen x_0, x_1, \dots, x_n von p_{n+1} als Knoten.
- Berechne (positive) Gewichte

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- **Ergebnis:** Gauß-Quadraturformel

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

mit $I_n[f] = I_n[p]$ für alle $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$.

14 Die Schnelle Fourier-Transformation

Ziel: Effiziente Berechnung der **Diskreten Fourier-Transformation** (DFT)

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \omega_N^{nm} \quad \text{für } 0 \leq m \leq N-1,$$

wobei

$$\omega_N := e^{-2\pi i/N}.$$

• **Methode** (COOLEY & TUKEY, 1965):

Schnelle Fourier-Transformation, “Fast Fourier-Transformation” (FFT).

• **INPUT:** Vektor

$$z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1))^T \in \mathbb{C}^N$$

• **OUTPUT:** \hat{z} , die **Diskrete Fourier-Transformation** (DFT) von z :

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \dots, \hat{z}(N-1))^T \in \mathbb{C}^N$$

Grundidee der schnellen Fourier-Transformation.

Wichtige Beobachtung: Es gilt $\omega_{2N}^2 = \omega_N$.

Divide and Conquer: Für $N = 2^k$ und $0 \leq m \leq N - 1$ gilt

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \omega_N^{mn} \\
 &= \sum_{n \text{ gerade}} z(n) \omega_N^{mn} + \sum_{n \text{ ungerade}} z(n) \omega_N^{mn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n) \omega_N^{2mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n+1) \omega_N^{(2n+1)m} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n) \omega_N^{2mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n+1) \omega_N^{2mn}.
 \end{aligned}$$

Reduktionsschritt.

Sei $M = N/2$. Dann gilt für $m = 0, 1, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{M-1} z(2n) \omega_N^{2mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{M-1} z(2n+1) \omega_N^{2mn} \\
 &= \sum_{n=0}^{M-1} u(n) \omega_{N/2}^{mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \omega_{N/2}^{mn} \\
 &= \sum_{n=0}^{M-1} u(n) \omega_M^{mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \omega_M^{mn},
 \end{aligned}$$

wobei $u(n) := z(2n)$ und $v(n) := z(2n+1)$ für $n = 0, 1, \dots, M - 1$.

Es gilt:

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + \omega_N^m \hat{v}(m) \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(\ell) - \omega_N^\ell \hat{v}(\ell) \quad \text{für } m = M, M + 1, \dots, N - 1, m = \ell + M.$$

Komplexität der schnellen Fourier-Transformation.

Fazit: Die Diskrete Fourier-Transformation von $z \in \mathbb{C}^N$ schreibt sich als Summe zweier Diskreter Fourier-Transformationen der Länge $N/2$.

Satz: Die schnelle Fourier-Transformation von $z \in \mathbb{C}^N$ kann für $N = 2^k$ in $\mathcal{O}(N \log(N))$ Schritten berechnet werden.

Beweisskizze:

- Zerlege FFT von z der Länge N in zwei FFTs der Länge $N/2$.
- Per Induktion: Zerlege FFT der Länge $N/2^j$ in zwei FFTs der Länge $N/2^{j+1}$.
- Es gilt $N = 2^k$, d.h. $k = \log_2(N)$.
- Daher bleiben nach $j = k$ Schritten nur noch N FFTs der Länge Eins übrig.
- Nun gilt $\hat{z}(0) = z(0)$ für $z \in \mathbb{C}^1$, d.h. konstante Kosten $\mathcal{O}(1)$ für $N = 1$.
- Man bekommt $\hat{z} \in \mathbb{C}^N$ mit dieser Rekursion nach $N \log_2(N)$ Schritten. \square

Schnelle Fourier-Transformation mit Matlab.

- Berechne **Fourier-Transformation** $w = \hat{z} \in \mathbb{C}^N$ aus $z \in \mathbb{C}^N$ mit Matlab.

$$w = \text{fft}(z);$$

- Berechne **inverse FFT** (IFFT) $z \in \mathbb{C}^N$ aus $w = \hat{z} \in \mathbb{C}^N$ mit

$$z = \text{ifft}(w);$$

Grundlage der IFFT: Die **Inversionsformel**

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} \quad \text{für } 0 \leq n \leq N - 1.$$

□