Kapitel 8. Integration

8.3. Der Hauptsatz und Anwendungen

Definition: Seien $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$. Dann heißt $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

Bemerkung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form
$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$
mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.
- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion
$$F_1(x) - F_2(x)$$
konstant.

Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) Die Funktion
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$
ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Beweisideen:

a) Zeige, dass gilt:
$$\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

b) Folgt direkt aus a) mittels
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Beweis von a).

Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.
Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \\
&\leq \sup\{\, |f(t) - f(x)| \,:\, |t-x| \leq h \text{ und } t \in [a,b]\} \\
&\to 0 \qquad (h \to 0),
\end{aligned}
$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[a,b]$.

Beweis von b).

Mit Teil a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

für eine Konstante C. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
F(b) &= \int_a^b f(t)\,dt + C \\
F(a) &= \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C = C
\end{aligned}
$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Bemerkungen.

- Teil a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen.

  An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

  $$F'(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad F'(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch das unbestimmte Integral von $f(x)$ und man schreibt

  $$F = \int f(x) dx$$

  Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beispiele zur Integration.

Wir bezeichnen mit C stets die Integrationskonstante.

$$\begin{aligned}
\int x^n \, dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0 \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele zur Integration.

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad \text{für } a \neq 0$$

$$\int b^x\,dx = \frac{1}{\ln b}b^x + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0$$

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C \qquad \text{für } x > 0$$

$$\int \log_b x\,dx = \frac{x}{\ln b}(\ln x - 1) + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

Wichtige Integrationsregeln.

Satz (Linearität): Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz (Partielle Integration): Sind $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Beweis: folgt direkt aus Produktregel der Differentiation.

Die Substitutionsregel.

Satz: Ist $h : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t))$$

Für bestimmte Integrale erhält man somit

$$\begin{aligned} \int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx \\ &= F(h(b)) - F(h(a)) \end{aligned}$$

Beweis: folgt direkt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t) \cdot h'(t)$$

Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \int \sin x \cdot \sin x\,dx \\
&= \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx \\
\Rightarrow \quad 2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x \cos x + x + C \\
\Rightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C
\end{aligned}$$

Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a\cos t$ in

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}(-a\sin t)\,dt$$

denn

$$dx = -a\sin(t)dt, \quad h(0) = a, \quad h(\pi) = -a$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-a\sin t)\,dt \\
&= a\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt \\
&= a(t - \sin t\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substitutiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\,2t\,dt\\ &= 2(t-1)e^t + C\\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

Bemerkung.

- Nicht jedes Integral läßt sich explizit "lösen", d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt "einfache" Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{(Integralsinus)}$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \text{(Fehlerfunktion)}$$

$$E(x,k) := \int_0^x (1-k^2\sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt \qquad \text{(Elliptische Integrale)}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a,b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a,b]) \cdot p(x)$$

Integration über $[a,b]$ liefert:

$$\min(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p(x) = 1$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \quad \text{für ein } \xi \in [a,b].$$

Der Satz von Taylor.

Man erhält die Taylor–Entwicklung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ um x_0 durch n–fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange–Restgliedformel aus dem Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

Kapitel 8. Integration

8.4. Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen $R(x)$ mit

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Methode: Partialbruch–Zerlegung von rationalen Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$\begin{aligned}
R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\
&\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \cdots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]
\end{aligned}$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

  $$\deg p \geq \deg q$$

  In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

  $$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x)$$

  mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.
- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

Ansatz der Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \cdots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned} &\alpha_{jl}, && j = 1, \ldots, n_1, \; l = 1, \ldots, k_j \\ &\gamma_{jl}, && j = n_1+1, \ldots, n_2, \; l = 1, \ldots, k_j \\ &\delta_{jl}, && j = n_1+1, \ldots, n_2, \; l = 1, \ldots, k_j \end{aligned}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel.

Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

- Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

- Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1+\gamma_1)x^3 + (\alpha_2+\delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1+\gamma_1 = 0, \quad \alpha_2+\delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

- **Typ I: Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

- **Typ II: Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & \text{für } l = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

- **Typ III: Inverse Quadrate:**

$$I_l := \int \frac{1}{(x^2+1)^l}\,dx \quad \text{für } l \in \mathbb{N}$$

  - Für $l = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

  - Für $l > 1$ kann man I_l wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)}\left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{l-1}}\right] \quad \text{für } l = 2, 3, \ldots$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2+1)^l}\,dx &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{u^{l-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{l-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{l-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{l-1}}\,dx = \int \frac{t^2+1}{(x^2+1)^l}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^l}\,dx + I_l \\ &= \frac{x}{2(1-l)(x^2+1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)}\cdot I_{l-1} + I_l\end{aligned}$$

Somit:

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)}\left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{l-1}}\right] \quad \text{für } l = 2, 3, \ldots$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx = \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx + (d+c\cdot a)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l}$$

- Erstes Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx &= \int \frac{du}{u^l}\\ &= \begin{cases} \ln|(x-a)^2+b^2|+C & \text{für } l=1\\ \dfrac{1}{1-l}\cdot\dfrac{1}{[((x-a)^2+b^2)^l]}+C & \text{für } l=2,3,\ldots\end{cases}\end{aligned}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^l} \qquad \text{mit } t=\frac{x-a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned}R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}\\ &= -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned}\int R(x)\,dx &= -\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &= -\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C\end{aligned}$$